Análise Matemática

Prof.ª Débora Cristina Brandt

UNIASSELVI
2013

Elaboração:

Prof.ª Débora Cristina Brandt

Revisão, Diagramação e Produção:
Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI

Ficha catalográfica elaborada na fonte pela Biblioteca Dante Alighieri
UNIASSELVI – Indaial.

510
B821a Brandt, Débora Cristina
Análise matemática / Débora Cristina Brandt. Indaial : Uniasselvi, 2013.

189 p. : il

ISBN 978-85-7830-748-6

1. Matemática.
I. Centro Universitário Leonardo da Vinci.

Apresentação

Pensando historicamente, podemos dizer que a Análise é a mãe da Matemática como a conhecemos hoje. Seu principal objetivo é dar o devido rigor matemático para propriedades e fatos que utilizamos em outras áreas, como o Cálculo, por exemplo. Talvez justamente por esta característica seja considerada uma das áreas – senão a área – mais difícil da Matemática. O presente Caderno de Estudos tem a pretensão de dar uma boa introdução a esta área fascinante, mais precisamente, a Análise Real.

Você perceberá logo na primeira unidade o porquê dessa disciplina ser uma das últimas do seu curso. Ela exige certa maturidade matemática para entender e resolver seus exercícios. Se nas outras disciplinas já não havia espaço para exemplos numéricos, na análise, esta dificuldade se torna mais evidente, pois ela precisa ser autoconsistente. Por esta razão, procuramos demonstrar todos os teoremas, proposições e corolários. Leia com atenção as demonstrações, tente acompanhá-las e dedique-se à resolução dos exercícios propostos.

A primeira unidade deste caderno inicia com a formalização de tudo o que sabemos a respeito dos números naturais. Construiremos as operações matemáticas que utilizamos normalmente e será possível observar a dificuldade que é encontrada para se demonstrar coisas que, para nós, são óbvias. Na sequência, definiremos conjuntos finitos e infinitos em termos dos números naturais, utilizando para isso funções e, mais à frente, utilizaremos uma ideia semelhante para introduzir o conceito de conjuntos enumeráveis.

A Unidade 2 é destinada a apresentar uma importante ferramenta matemática, conhecida como séries. A importância das séries vai além do que será tratado neste Caderno de Estudos. Nos restringiremos aqui a apresentar o conceito de séries numéricas, suas propriedades e limites de convergência (quando existem). Iremos ver como concluir pela convergência ou não de séries através de critérios matemáticos. Entretanto, para a total compreensão do assunto, faz-se necessário falar em sequências numéricas, e é com este assunto que iniciamos esta unidade.

Finalmente, a Unidade 3 tem por objetivo apresentar alguns dos principais conceitos da Topologia no âmbito da reta real. Começaremos a unidade tratando dos números reais em si e suas características para, ao final, apresentarmos as noções de conjuntos abertos e fechados, assuntos-chave para o estudo topológico da reta. Por uma questão organizacional, algumas propriedades do conjunto dos números reais já serão utilizadas na Unidade 2.

As leituras complementares deste material tratam de assuntos diversos. Ao final da Unidade 1, temos um texto de J. Stewart falando da arte de resolver problemas. Este texto apresenta um esquema para resolver problemas que podem ser facilmente implementados para se resolver demonstrações matemáticas também. Acreditamos que possa lhe ser útil neste momento, para o estudo dos conceitos de análise, como também na sua futura vida como professor, para auxiliar seus alunos na resolução de exercícios mais complexos.

Ao final da Unidade 2, temos um pequeno texto explicando um pouco como apareceram as séries numéricas. Este foi adaptado de um texto de Geraldo Ávila.

A leitura complementar da Unidade 3 nos dá uma ideia do surgimento da topologia como área da matemática e nos apresenta algumas figuras topológicas que fogem ao escopo deste livro (não estão mais na reta, e sim no plano e espaço), mas nos dão uma ideia da maravilha que é esta área da matemática.

Por fim, gostaria de deixar claro que, sim, esta provavelmente é a matéria mais complicada do seu curso, mas também uma das mais importantes. Portanto, não desanime se encontrar dificuldades em entender o material ou resolver os exercícios: perseverança é a palavra-chave. Utilize todos os canais de comunicação que esta instituição disponibiliza para você e conte com o apoio da nossa equipe. Estamos aqui para lhe ajudar!

Bom estudo, e muito sucesso na sua futura vida como professor!

Prof.ª Débora Cristina Brandt

Você já me conhece das outras disciplinas? Não? É calouro? Enfim, tanto para você que está chegando agora à UNIASSELVI quanto para você que já é veterano, há novidades em nosso material.

Na Educação a Distância, o livro impresso, entregue a todos os acadêmicos desde 2005, é o material base da disciplina. A partir de 2017, nossos livros estão de visual novo, com um formato mais prático, que cabe na bolsa e facilita a leitura.

O conteúdo continua na íntegra, mas a estrutura interna foi aperfeiçoada com nova diagramação no texto, aproveitando ao máximo o espaço da página, o que também contribui para diminuir a extração de árvores para produção de folhas de papel, por exemplo.

Assim, a UNIASSELVI, preocupando-se com o impacto de nossas ações sobre o ambiente, apresenta também este livro no formato digital. Assim, você, acadêmico, tem a possibilidade de estudá-lo com versatilidade nas telas do celular, *tablet* ou computador.

Eu mesmo, UNI, ganhei um novo *layout*, você me verá frequentemente e surgirei para apresentar dicas de vídeos e outras fontes de conhecimento que complementam o assunto em questão.

Todos esses ajustes foram pensados a partir de relatos que recebemos nas pesquisas institucionais sobre os materiais impressos, para que você, nossa maior prioridade, possa continuar seus estudos com um material de qualidade.

Aproveito o momento para convidá-lo para um bate-papo sobre o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE.

Bons estudos!

BATE PAPO SOBRE O ENADE!

Olá, acadêmico!

Você já ouviu falar sobre o **ENADE**?

Se ainda não ouviu falar nada sobre o ENADE, agora você receberá algumas informações sobre o tema.

Ouviu falar? Ótimo, este informativo reforçará o que você já sabe e poderá lhe trazer novidades.

Vamos lá!

Qual é o significado da expressão ENADE?

EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Em algum momento de sua vida acadêmica você precisará fazer a prova ENADE.

Que prova é essa?

É **obrigatória**, organizada pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Quem determina que esta prova é obrigatória... O **MEC – Ministério da Educação**.

O objetivo do MEC com esta prova é o de avaliar seu desempenho acadêmico assim como a qualidade do seu curso.

Fique atento! Quem não participa da prova fica impedido de se formar e não pode retirar o diploma de conclusão do curso até regularizar sua situação junto ao MEC.

Não se preocupe porque a partir de hoje nós estaremos auxiliando você nesta caminhada.

Você receberá outros informativos como este, complementando as orientações e esclarecendo suas dúvidas.

Você tem uma trilha de aprendizagem do ENADE, receberá e-mails, SMS, seu tutor e os profissionais do polo também estarão orientados.

Participará de webconferências entre outras tantas atividades para que esteja preparado para #mandar bem na prova ENADE.

Nós aqui no NEAD e também a equipe no polo estamos com você para vencermos este desafio.

Conte sempre com a gente, para juntos mandarmos bem no ENADE!

UNIASSELVI

SUMÁRIO

UNIDADE 1

MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO E O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Esta unidade tem por objetivos:

- familiarizar-nos com demonstrações matemáticas;
- ter contato mais estreito com o rigor matemático;
- conhecer o conjunto dos números naturais através de uma abordagem axiomática;
- aprender o que são conjuntos finitos e conjuntos limitados e como diferenciá-los;
- definir conjuntos enumeráveis e aprender a identificá-los.

PLANO DE ESTUDOS

A Unidade 1 está dividida em quatro tópicos, contendo exemplos e, no final de cada um, exercícios para lhe familiarizar com o assunto.

TÓPICO 1 – MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

TÓPICO 2 – O CONJUNTO DE NÚMEROS NATURAIS

TÓPICO 3 – CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

TÓPICO 4 – CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

TÓPICO 1

MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

1 INTRODUÇÃO

Recentemente, foi vinculado nos meios de comunicação que uma descoberta feita pelos cientistas do CERN – Centro Europeu de Pesquisas Nucleares – estaria pondo em xeque a Teoria da Relatividade de Einstein. Em poucas palavras, estes cientistas teriam conseguido fazer com que neutrinos atingissem uma velocidade superior a da luz em Física que, de acordo com a Teoria da Relatividade, é a maior velocidade possível de ser atingida. Este fato causou muita discussão e apreensão porque, se realmente fosse confirmado, boa parte da Física Moderna teria que ser revista.

Grande parte das ciências é construída sobre teorias. Estas teorias explicam de uma maneira cientificamente convincente aspectos que podem ser observados e, muitas vezes, coexistem com teorias que fornecem outras explicações para o mesmo fato. Por exemplo, em Biologia, temos a Teoria Evolucionista de Darwin e a Teoria Criacionista, que apresentam explicações distintas sobre o mesmo fato: a criação da vida. Também na Física, temos a Teoria do Big Ben, que tenta explicar a origem do universo e, embora seja bem plausível e aceita como verdadeira, é apenas uma teoria: isto é, pode estar errada!

Se considerarmos a Matemática como uma ciência, talvez ela seja a única em que estes fatos não ocorram, isto é, a palavra teoria, quando utilizada em matemática, tem caráter de verdade absoluta. Na Matemática, toda e qualquer afirmação de uma dada teoria precisa ser provada e, uma vez provada, passa a valer sempre, independente da situação em que for empregada, desde que suas hipóteses sejam satisfeitas. Vamos dar um exemplo que clareie esta afirmação: em Cálculo, você aprendeu que se a derivada de uma função real existe em qualquer ponto, então ela é contínua. Podemos utilizar este resultado porque ele já foi demonstrado e toda a vez que nos deparamos com uma função cuja derivada existe em qualquer ponto, podemos concluir sem receio que ela é contínua.

Mas o que significa demonstrar matematicamente? Demonstrar matematicamente uma afirmação é, a partir de certas hipóteses evidenciadas na afirmação, utilizar argumentos lógicos até chegar à tese, ou seja, no resultado que se deseja chegar, por meio de algum método de demonstração matemática. Dito isto, vamos estudar os três métodos existentes de demonstração.

2 MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

Existem três métodos de demonstração matemática: demonstração direta, demonstração por indução e demonstração por absurdo. Vamos definir a seguir os três métodos e mostrar através de exemplos como cada um deles funciona.

2.1 DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

Você deve se lembrar deste tipo de demonstração, pois já o estudou em Álgebra. O Método de Indução Finita é aplicado sempre que a afirmação que queremos demonstrar envolve contagem, ou que deve valer para qualquer número natural n. A ideia é mostrar que a propriedade vale para o número natural 1, assumir que vale para um número qualquer k e, depois, provar que vale para o número k+1. Formalmente:

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO: Seja P(n) uma propriedade referente ao número natural n e suponhamos que:
a) P(1) é verdadeira.
b) P(k) ser verdadeira implica P(k+1) ser verdadeira, em que k é um número natural.
Então P(n) é verdadeira para todo número natural n.

Vamos entender como o princípio de indução funciona através de um exemplo.

EXEMPLO 1: Mostre que $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ para todo n

Demonstração:

a) Tomando n = 1, temos que nossa propriedade é válida, pois

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=\frac{2}{2}$$

b) Vamos agora admitir que a propriedade é válida para n = k, e mostrar que a propriedade também vale para n = k+1. Para isso, vamos partir do lado esquerdo da igualdade, impondo n = k+1.

$$\underbrace{1+2+\ldots+k}+(k+1)=\underbrace{\frac{k\cdot(k+1)}{2}}+(k+1)$$

$$=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+\frac{2\cdot(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k\cdot\overbrace{(k+1)}+2\cdot\overbrace{(k+1)}}{2}$$

$$=\frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2}$$

Logo $1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{(k+2)\cdot(k+1)}{2}$.

Como k foi suposto ser um número qualquer, segue pelo princípio da indução que a propriedade é válida para qualquer número natural n.

A demonstração por absurdo pode ser aplicada para resultados que envolvem números inteiros a partir de um certo c>1. Neste caso, mostramos que vale para c, assumimos que vale para c + 1 e provamos que esta afirmação implica a propriedade valer para c+n, qualquer que seja o natural n > 1.

EXEMPLO 2: Vamos provar que 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 para todo número natural n.

Demonstração:

a) Inicialmente, observamos que P(1), ou seja, que a propriedade é válida quando n = 1: 1 = 1^2.
b) Suponhamos agora que, quando n = k, a propriedade é válida, isto é, 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = k^2, e vamos mostrar que também é válida para n = k+1.

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}+[2(k+1)-1]=\underbrace{k^2}+[2(k+1)-1]$$

$$=k^2+2k+2-1$$

$$=k^2+2k+1$$

$$=(k+1)^2$$

Como k foi suposto como sendo qualquer número natural, segue que a propriedade vale para qualquer número natural n, CQD.

É comum você ver em livros de matemática escritos em português a sigla CQD no final de demonstrações matemáticas. Estas três letras são a abreviação da sentença "como queríamos demonstrar", que indica o fim da demonstração. Em livros de línguas estrangeiras, ou mesmo em alguns livros brasileiros mais formais, você pode encontrar a abreviação QED que significa exatamente a mesma coisa, mas vem da sentença em latim "*quod erat demonstrandum*".

EXEMPLO 3: Vamos mostrar que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo número natural n.

Demonstração:

Note que P(1), isto é, a propriedade vale para n = 1:
$1 + 2^n = 2^{n+1} - 1$, com n = 1
$1 + 2^1 = 2^{1+1} - 1$
$1 + 2 = 2^2 - 1$
$3 = 3$

Vamos supor então que a propriedade vale para n = k,
P(k): $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$
e provar que vale também para n = k+1.

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+2+2^2+2^3+\dots+2^k} + (2^{k+1}) &= \underbrace{2^{k+1}-1} + (2^{k+1}) \\
&= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{1+k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}$$

Como k foi suposto como sendo qualquer número natural, segue que a propriedade vale para qualquer número natural n, CQD.

Vamos a seguir apresentar outro tipo de demonstração matemática.

2.2 DEMONSTRAÇÃO DIRETA

A demonstração direta, como o próprio nome diz, deve partir das hipóteses existentes na afirmação chegar à tese através de argumentos lógicos válidos. Cabe ressaltar que, por argumentos lógicos válidos devemos entender definições, verdades absolutas (axiomas) ou resultados já mostrados anteriormente.

Vamos entender como funciona este tipo de demonstração através de um exemplo.

EXEMPLO 1: Dados dois números reais a e b, $|a + b| \leq |a|+|b|$.

Demonstração:

Vamos relembrar o que significa o conceito de valor absoluto de um número qualquer x : $|x| = x$ sempre que $x \geq 0$ e $|x| = -x$ sempre que $x < 0$.

Consideremos a e b dois números reais quaisquer. Então $|a + b|^2 = (a+b)^2$, pois o quadrado de um número é sempre um valor positivo. Por outro lado, $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Logo

$$
\begin{aligned}
|a + b|^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
&\leq |a|^2 + 2 \cdot |a| \cdot |b| + |b|^2 \\
&= (|a| + |b|)^2
\end{aligned}
$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da equação, obtemos que $|a + b| \leq |a|+ |b|$, CQD.

UNI

A propriedade apresentada no exemplo anterior é conhecida como Desigualdade Triangular e é de grande valia no estudo dos números reais. Mais à frente, voltaremos a mencioná-la.

Assim, a demonstração anterior partiu das hipóteses da afirmação, no caso, de dois números reais quaisquer e, através da definição de valor absoluto e de um truque matemático – a de elevá-lo ao quadrado – chegou naturalmente na desigualdade desejada.

Vamos exibir mais um exemplo de demonstração direta envolvendo outra ideia engenhosa.

EXEMPLO 2: Para todo número real a não nulo, temos que $a \cdot 0 = 0$.

Demonstração:

Seja a um número real diferente de zero. Então $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$, ou seja, $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$. Somando agora $(-a \cdot 0)$ de ambos os lados da equação, temos que $- a \cdot 0 + (a \cdot 0 + a \cdot 0) = -a \cdot 0 + a \cdot 0$

$$(- a \cdot 0 + a \cdot 0) + a \cdot 0 = 0$$
$$0 + a \cdot 0 = 0$$
$$a \cdot 0 = 0$$

Portanto, $a \cdot 0 = 0$ para todo número real não nulo a, CQD.

O método da demonstração direta é o mais elegante entre os três e por vezes o mais difícil de ser utilizado, pois exige certo grau de maturidade matemática. Ao longo deste Caderno de Estudos, você o encontrará diversas vezes e poderá observar melhor como ele funciona.

Vamos ao terceiro e último método de demonstração matemática.

2.3 DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

Na disciplina de Lógica Matemática, você aprendeu que se uma afirmação matemática do tipo $p \rightarrow q$ é verdadeira, então sua negativa $\sim q \rightarrow \sim p$ também é válida. A ideia da demonstração do absurdo é exatamente essa: mostrar que uma afirmação é válida negando sua tese e mostrando que este ato implica alguma de suas hipóteses ser falsa. Vamos ver um exemplo desta técnica.

EXEMPLO 1: Se m é um número inteiro e m^2 é um número par, então m também é um número par.

Demonstração:

Seja m é um número inteiro tal que m^2 é par e suponhamos por absurdo que m é ímpar. Então existe um número inteiro k para o qual podemos escrever $m = 2 \cdot k + 1$.

Logo:

$$\begin{aligned} m^2 &= (2 \cdot k + 1)^2 \\ &= (2 \cdot k)^2 + 2 \cdot (2 \cdot k) + 1 \\ &= 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 \end{aligned}$$

Como $4 \cdot k^2$ e $4 \cdot k$ são números pares, segue que $4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$ é um número ímpar, e, portanto, m^2 também é ímpar. Assim, m^2 é par e ímpar ao mesmo tempo, o que é absurdo. Segue que m não pode ser um número ímpar, ou seja, m é um número par, CQD.

Você deve ter percebido de que forma o método de demonstração por absurdo funciona. O fato de negarmos que m era par – o que, em princípio, poderia de fato ser – foi crucial para contradizermos a hipótese de que m^2, fato esse que não estava em discussão. Desta forma, a única possibilidade que restou para m era ser, realmente, um número par.

Vamos ver mais um exemplo deste engenhoso método.

EXEMPLO 2: O número real é $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que $\sqrt{2}$ não seja um número irracional. Então $\sqrt{2}$ só pode ser um número racional, isto é, existem dois números inteiro p e q (q não nulo) tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Vamos supor sem perda de generalidade que p e q são primos entre si, ou seja, que a fração está na forma irredutível.

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ou seja, $p^2 = 2q^2$.

Logo, p^2 é um número par e, portanto, p também é um número par (acabamos de demonstrar esta propriedade no exemplo anterior). Assim, existe um inteiro não nulo k tal que $p = 2k$. Desta forma, $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Por outro lado, $p^2 = 2q^2$, isto é, $4k^2 = 2q^2$, implicando $q^2 = 2k^2$, ou seja, q^2 também é par. Logo, temos que q é par, assim, como p. Mas então, tanto p como q são números divisíveis por dois, o que é um absurdo, pois partimos da suposição que p e q eram primos entre si. Portanto, não existem p e q tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, isto é, $\sqrt{2}$ é obrigatoriamente irracional, CQD.

Os métodos de demonstração não são excludentes entre si, isto é, em várias situações, mais de um método pode ser utilizado para provar um mesmo resultado. A escolha de qual método utilizar dependerá da pessoa que pretende demonstrar a afirmação e de como a enxerga no momento.

Agora que você já conhece os três métodos de demonstração matemática, poderemos entrar de fato no conteúdo da disciplina. Em análise, mais importante do que os resultados (alguns inclusive já conhecidos por você de outras matérias) é a forma com que eles são apresentados e principalmente demonstrados. Portanto, não ignore as demonstrações matemáticas que serão exibidas: leia-as com atenção e, se possível, tente reproduzi-las. Mais uma vez, salientamos que matemática não tem nada a ver com mágica e acreditamos que é dessa forma que você deve entendê-la e repassá-la em sala de aula.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico, vimos que existem três métodos de demonstração matemática.

- Método de demonstração por indução: aplicado quando o resultado a ser provado envolve indexação por números naturais (índices naturais). Prova-se que a afirmação vale para o número inteiro 1, admite-se que ela é válida para um número natural k e prova-se que, nestas condições, ela é válida para k+1.

- Método de demonstração direta: a partir das hipóteses contidas na afirmação a ser provada, utilizam-se argumentos lógicos válidos para se chegar à tese. Este é o método mais elegante e mais difícil de ser utilizado.

- Método de demonstração por absurdo: nega-se o que deve ser provado e, através de argumentos lógicos, contradiz-se uma das hipóteses contidas na afirmação.

- Os três métodos não são excludentes e, em princípio, um resultado pode ser provado utilizando-se qualquer um dos métodos.

AUTOATIVIDADE

Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico resolvendo alguns exercícios.

1 Demonstre através do método de indução que, para qualquer número natural n,

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
b) $2^n > n$

2 Demonstre os resultados a seguir através da demonstração direta que, dados a e b dois números reais quaisquer,

a) $|a - b| \leq |a| + |b|$.
b) $|a| - |b| \leq |a - b|$
c) $|a| - |b| \leq |a + b|$

3 Demonstre os resultados a seguir utilizando a técnica de demonstração por absurdo.

a) Se um número real x for tal que x + x = x, então x obrigatoriamente é igual a 0.
b) Se dois números a e b são números pares, então o número a + b também é um número par.

O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

1 INTRODUÇÃO

O matemático alemão Leopold Kronecker disse certa vez que Deus fez os números naturais, e o resto é obra dos homens (MILIES; COELHO, 1998, p. 178). Esta expressão se justifica pelo fato de admitirmos facilmente a existência dos números naturais. Desde os primórdios, o ser humano aprendeu a lidar com esta categoria de números, a associar quantidades a eles e contar objetos. Todos os outros conjuntos numéricos (os inteiros **Z**, os reais **R** e mesmo os complexos **C**) podem ser criados a partir dos números naturais. Vamos ver neste tópico que os números naturais podem ser apresentados a partir de um número reduzido de axiomas, conhecidos como os Axiomas de Peano.

Giuseppe Peano (1858 a 1932) foi um matemático italiano que é tido como o fundador da moderna lógica matemática e da teoria dos conjuntos. Ele apresentou os números naturais em um trabalho de 1879 com uma abordagem axiomática, isto é, ele não define os números naturais: admitindo sua existência, Peano exibe algumas propriedades que eles possuem (axiomas) e constrói sua teoria a partir delas baseado no fato de que o conjunto dos números naturais pode ser ordenado, ou seja, todo número natural admite um (e apenas um) sucessor. Por este fato, a teoria de Peano é uma teoria ordinal.

Existe outra abordagem possível para apresentar os números naturais a partir do fato que eles representam quantidade, ou seja, uma teoria cardinal. Esta teoria foi desenvolvida pelo matemático alemão Julius Richard Dedekind (1831-1916) (LIMA, 1976).

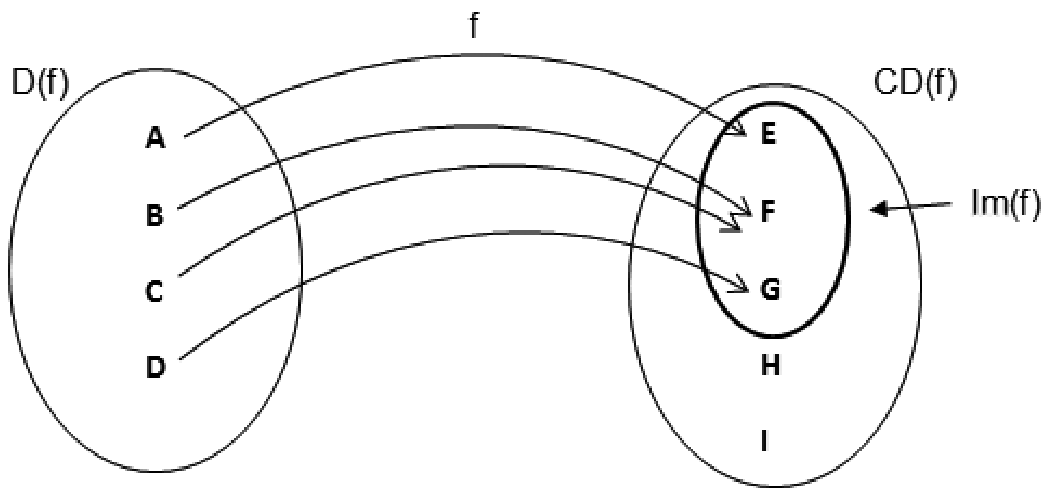
Mas antes de apresentarmos a teoria de Peano propriamente dita, precisamos relembrar um conceito que aparecerá muitas vezes ao longo deste Caderno de Estudos: o conceito de função.

DEFINIÇÃO 1.1: Dados dois conjuntos A e B não vazios, chamamos de função de A em B a relação f definida a partir de A que relaciona cada elemento x do conjunto A a um único elemento f(x) do conjunto B.

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

O conjunto A é chamado de domínio de f, D(f) e o conjunto B de contradomínio de f. Já a imagem de f é o subconjunto de B definido como IM(f) = $\{f(x) \in B \mid x \in A\}$.

FIGURA 1 – FUNÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS



FONTE: Autora

Quando a imagem da função f é exatamente o contradomínio de f (Im(f) = B), dizemos que f é sobrejetora.

Além disso, se valer a seguinte afirmação $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, quaisquer que sejam x e y elementos de A, dizemos que f é injetora.

Assim, uma função pode ser sobrejetora, injetora, nem sobrejetora nem injetora, ou sobrejetora e injetora. Neste último caso, dizemos que f é bijetora.

Agora sim, estamos prontos para começarmos a estudar o conjunto dos números naturais.

2 AXIOMAS DE PEANO

Consideremos então um conjunto de números que denotaremos por **N** e uma função $\boldsymbol{\sigma : N \to N}$ que leva cada elemento $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ em $\boldsymbol{\sigma(n)} \in \mathbf{N}$, chamado de *sucessor* de n. Assim, **σ(n)** será chamado de *sucessor* de n, e n será chamado de *antecessor* de **σ(n)**.

o símbolo σ é a oitava letra do alfabeto grego, chamada de sigma. No nosso alfabeto, representaria o 's' minúsculo, sendo que o 's' maiúsculo representado por $\sum$ - sigma maiúsculo, nosso conhecido símbolo de somatória.

A função **σ** satisfaz os seguintes axiomas:

AXIOMA 1: $\boldsymbol{\sigma}$**:** $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ é uma função injetora, ou seja, dados quaisquer dois elementos n, m $\in$ N, se $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{(m)}$, então obrigatoriamente, n = m.

Traduzindo o que foi dito no axioma para uma linguagem mais coloquial, se dois elementos têm o mesmo sucessor, obrigatoriamente eles não são iguais. Ainda: dois elementos diferentes têm sucessores diferentes, ou seja, se $m \neq n$, então $\boldsymbol{\sigma}(m) \neq \boldsymbol{\sigma}(n)$.

AXIOMA 2: **σ** não é sobrejetora, e N - **σ(N)** só possui um elemento, isto é, só existe um único elemento que não é sucessor de nenhum outro. Chamaremos este número de 'um' e o denotaremos por '1'.

Note que o Axioma 2 nos dá uma mensagem muito clara: o número zero não é considerado um número natural nesta abordagem. Assim, os números naturais começam pelo elemento 1: $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)} \neq 1$ para todo natural n. Não há outro número natural anterior a ele!

AXIOMA 3 (Princípio da Indução): Se X for um subconjunto de **N** que contenha o elemento 1, e se para todo elemento n de X, $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)} \in X$, então X = N.

Note que o Axioma 3 nos diz exatamente o mesmo que a definição do método de demonstração por indução: se uma propriedade referente aos números naturais valer para 1 e se, admitindo que valha para n pudermos mostrar que vale para n+1, então esta propriedade vale para qualquer número natural.

Vamos utilizar o Princípio de Indução para provar a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1.2.1: Qualquer que seja o número natural n, $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)} \neq n$.

Demonstração:

Seja X o conjunto de todos os números naturais n para os quais $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)} \neq n$.

Note que o número 1 pertence a X, pois sabemos que $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)} \neq 1$ para todo natural n: em particular, $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)} \neq 1$.

Suponhamos então que **$\sigma(k)$** $\neq$ k para algum número natural k (k $\in$ X) e vamos mostrar que **$\sigma(k)$** também pertence a X.

Como o Axioma 1 nos garante que a função **σ** é injetora, segue que, se **$\sigma(k)$** $\neq$ k, então **$\sigma(\sigma(k))$** $\neq$ **$\sigma(k)$**, ou seja, realmente **$\sigma(k)$** também pertence a X. Logo, pelo Axioma 3, X = N e, portanto, **$\sigma(n)$** $\neq$ n para todo natural n, CQD.

A Proposição 1.2.1 está nos garantindo que nenhum número é sucessor dele mesmo.

Definiremos agora as operações de adição e multiplicação, utilizando para isso apenas os três axiomas apresentados. Você notará que teremos bastante trabalho para provarmos conceitos que temos como óbvios; por outro lado, a demonstração destes resultados nos prova que eles de fato são válidos.

Partiremos da definição de adição de dois números naturais. Para isso, introduziremos o símbolo '+' associando-o à função **σ** para um número natural **n** $\in$ **N** fixo. Definiremos então o que significa n+1 e n+m, qualquer que seja o natural m.

3 ADIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

DEFINIÇÃO 1.2.1: Seja n um número natural. Definimos então:

a) **$\sigma(n) = n + 1$**
b) m + **$\sigma(n) = \sigma(m + n)$** para todo natural m.

Com esta definição, podemos utilizar agora a ideia que nos surge quando falamos em sucessor. Um exemplo pode facilitar o entendimento do que esta definição tenta nos dizer.

EXEMPLO: Consideremos m = 2 e n = 3.

A primeira parte da definição nos diz quem é o sucessor de 3: **$\sigma(3) = 3 + 1 = 4$**. Não importa qual seja n, a definição generaliza a ideia de sucessor para todos eles.

Vamos agora à segunda parte: m + **$\sigma(n)$** = **2** + **$\sigma(3)$**. Já sabemos que o sucessor de 3 é 4 e, portanto, **$2 + \sigma(3) = 2 + 4 = 6$**. Por outro lado, a definição nos diz que **$2 + \sigma(3) = \sigma(2 + 3)$**, que é o mesmo que considerar o sucessor de 5, ou seja, 6.

$$\mathbf{2 + \sigma(3) = \sigma(2 + 3) = \sigma(5) = 6}$$

E se quiséssemos somar 2 e 3?

Sabemos que, com exceção do 1, todo número natural é sucessor de algum outro número. Na verdade, sabemos que 3 é sucessor de 2. Assim, a definição anterior nos garante que somar 2 e 3 é o mesmo que somar 2 e o sucessor de 2:

$\mathbf{2 + 3 = 2 + \sigma(2) = \sigma(2 + 2) = \sigma(4) = 5}$.

Você deve estar pensando que a forma com que somamos normalmente é muito mais simples do que esta. Entretanto, lembre-se que, em princípio, não sabemos ainda somar, isto é, a adição de números naturais como a conhecemos, ainda não foi definida aqui. Assim, a definição anterior vem suprir esta necessidade, e vamos mostrar daqui a pouco que ela equivale à definição da nossa soma habitual.

Vamos mostrar agora as propriedades que nos permitem somarmos dois números naturais como fazemos usualmente.

PROPOSIÇÃO 1.2.2: Seja n um número natural qualquer, então a soma m + n está bem definida para todo número natural m.

A expressão "bem definida" aqui significa que a Definição 1.2.1. nos fornece todas as condições para somarmos m + n como fazemos usualmente.

Demonstração:

Vamos utilizar para demonstrar esta proposição o Axioma 3, através da técnica de demonstração por indução: dado n um número natural, seja X o conjunto de todos os números naturais m para os quais está bem definida a soma m + n.

Note que $\mathbf{1} \in \mathbf{X}$, pois pela Definição 1.2.1, m + 1 = $\boldsymbol{\sigma}$**(m)**.

Suponhamos então que m + k está bem definido para algum natural k, ou seja, que m + k pertença a X e vamos mostrar que m + $\boldsymbol{\sigma}$**(k)** também pertence a X.

Agora a definição 1.2.1 b, $\mathbf{m + \sigma(k) = \sigma(m + k)}$.

Segue que $\mathbf{m + \sigma(k)}$ está bem definida e, portanto, também pertence a X e, assim, X = N, CQD.

Agora sim: se dado um número natural n qualquer, a soma m + n está bem definida para todo número natural m, então logicamente, a soma m + n está bem definida quaisquer que sejam os números naturais m e n.

Todas as propriedades da adição podem então ser demonstradas a partir do princípio de indução. Vamos mostrar a associatividade e enunciar as seguintes.

PROPOSIÇÃO 1.2.3 (Associatividade da Adição): Sejam m, n e p três números naturais quaisquer. Então $(m + n) + p = m + (n + p)$.

Demonstração:

Seja X o conjunto de todos os números naturais p para os quais $(m + n) + p = m + (n + p)$ para todos $\mathbf{m, n} \in \mathbf{N}$.

Note que o elemento 1 está em X pois, pela Definição 1.2.1, $(m + n) + 1 = \sigma(m + n) = m + \sigma(n) = m + (n + 1)$.

Suponhamos então que k seja um número natural que esteja em X, isto é, para o qual, $(m + n) + k = m + (n + k)$ e vamos mostrar que $\boldsymbol{\sigma(k)}$ também pertence a X.

De fato,

$$
\begin{aligned}
(m + n) + \sigma(k) &= \sigma((m + n) + k) && \text{Definição 1.2.1 b} \\
&= \sigma(m + (n + k)) && \text{k pertence a X por hipótese} \\
&= m + \sigma((n + k)) && \\
&= m + (n + \sigma(k)) && \text{Definição 1.2.1 b}
\end{aligned}
$$

Portanto, $\boldsymbol{\sigma(k)}$ também pertence a X, implicando X = **N**, CQD.

PROPOSIÇÃO 1.2.4 (Comutatividade da Adição): Sejam m e n dois números quaisquer. Então $m + n = n + m$.

Demonstração:

Deixamos esta demonstração a seu cargo.

PROPOSIÇÃO 1.2.5 (Lei do corte): m, n e p três números naturais quaisquer, se $m + n = m + p$, então $n = p$.

Demonstração:
Deixamos esta demonstração a seu cargo.

PROPOSIÇÃO 1.2.6 (Tricotomia): Dados dois números inteiros m e n, exatamente uma das três alternativas seguintes pode ocorrer:

(i) $m = n$;
(ii) existe $p \in N$ tal que $m = n + p$;
(iii) existe $q \in N$ tal que $n = m + q$.

Demonstração:

Novamente, utilizaremos o método de indução para demonstrar esta propriedade. Primeiro, fixaremos $m = 1$ e, mostraremos que, para todo n, vale a propriedade. Depois, utilizaremos a indução sobre m.

Seja n um número natural qualquer e consideremos X como sendo o conjunto de todos os números naturais m para os quais uma das alternativas vale:

(i) $m = n$;
(ii) existe $p \in N$ tal que $m = n + p$;
(iii) existe $q \in N$ tal que $n = m + q$.

<u>Caso 1</u>: $m =1$

Se $n = 1$, vale (i) e não há o que mostrar.

Por outro lado, se n for diferente de 1, existe um número natural p para o qual $n = \sigma(p)$. Neste caso, $n = p + 1 = 1 + p$ e, portanto, vale a condição (iii).

OBS: A condição (ii) não será válida neste caso, pois $m = 1$, que é o primeiro número natural, e não existe número anterior a 1.

Mostramos então que o número natural $m = 1$ pertence a X.

<u>Caso 2</u>: m diferente de 1.

Consideremos então k um número natural pertencente a X e vamos mostrar que $\sigma(k)$ também pertence a X.

Como k pertence a X, este número satisfaz uma das três condições.

Vamos analisá-las uma a uma:

(a) Se $k = n$ então, pela injetividade de σ, $\sigma(k) = \sigma(n) = n + 1$. Neste caso, existe p em **N**, no caso 1, tal que $\sigma(k)$ pode ser escrito como $n + p$, e a condição (ii) é satisfeita.

(b) Caso valha a segunda condição para k, existe $p \in N$ tal que $k = n + p$. Então $\sigma(k) = \sigma(n + p) = n + \sigma(p)$. Agora, se $p \in N$, então $\sigma(p) \in N$ e, portanto, vale (ii) para $\sigma(k)$.

(c) Caso valha a terceira condição, existe $q \in N$ tal que $n = k + q$.

Se q = 1, então $n = k + 1 = \sigma(k)$ pela Definição 1.2.1, e novamente vale (i).

Agora, se $q \neq 1$, existe um número natural r tal que $q = \sigma(r)$. Assim, existe um número natural r tal que

$$
\begin{array}{rl}
n = k + q & \\
n = k + \sigma(r) & \\
\sigma(n) = \sigma(k + \sigma(r)) & \\
\sigma(n) = \sigma(\sigma(r) + k) & \text{Comutatividade} \\
\sigma(n) = \sigma(r) + \sigma(k) & \text{Definição 1.2.1 b} \\
n + 1 = r + 1 + \sigma(k) & \text{Definição 1.2.1 a} \\
n + 1 = r + \sigma(k) + 1 & \text{Comutatividade} \\
n = r + \sigma(k) & \text{Lei do Corte}
\end{array}
$$

Logo, mostramos que existe r tal que $n = r + \sigma(k)$, ou seja, vale (iii).

Assim $\sigma(k)$ pertence a X e, portanto, pelo Princípio de Indução, segue que X = N, CQD.

De posse da proposição 1.2.6, estamos em condições de definirmos a relação de ordem dos números naturais.

DEFINIÇÃO 1.2.2: Dados dois números naturais m e n, dizemos que m é menor do que n se existe algum número natural p para o qual $n = m + p$. Neste caso, escrevemos $m < n$ e dizemos que m é menor do que n. Neste caso, dizemos também que n é maior do que m, e escrevemos $n > m$.

EXEMPLO: O número 9 é menor do que o número 15, pois existe um número natural p (p = 6) tal que 15 = 9 + p.

A relação de ordem enunciada anteriormente tem as seguintes propriedades:

PROPOSIÇÃO 1.2.7 (Transitividade): Se m, n e p são três números naturais tais que $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Demonstração:

Sejam m, n e p três números naturais tais que $m < n$ e $n < p$. Então existem dois números naturais q e r tais que $n = q + m$ e $p = r + n$. Vamos então substituir a expressão encontrada para n na expressão que relaciona p e n: $p = r + (q + m)$. Utilizando agora a associatividade da adição, temos que $p = (r + q) + m$, ou seja, existe um número natural $(r + q)$ tal que $p = (r + q) + m$. Portanto, por definição, $m < p$, CQD.

PROPOSIÇÃO 1.2.8 (Tricotomia): Dados dois números naturais m e n, uma e apenas uma das afirmações a seguir ocorre:

(i) $m = n$;
(ii) $m < n$;
(iii) $m > n$.

Demonstração:

Esta proposição é uma consequência imediata da Proposição 1.2.6. Deixamos, portanto, o detalhamento desta demonstração a seu cargo.

PROPOSIÇÃO 1.2.9 (Monotonicidade da adição): Sejam m e n dois números inteiros tais que $m < n$. Então, para todo $p \in \mathbf{N}$, $m + p < n + p$.

Demonstração:

Sejam m e n dois números inteiros tais que $m < n$. Então, por definição, existe um número natural q tal que $n = q + m$. Somando p de ambos os lados da expressão e utilizando as propriedades de comutatividade e associatividade da adição, temos que $p + n = p + (q + m) = p + q + m = q + p + m = q + (p + m)$, ou seja, $p+m < p+n$, CQD.

De posse de todas as proposições feitas até agora, temos a adição de dois números naturais conforme a conhecemos bem definida. Falta-nos agora definir a multiplicação de dois números naturais e provar suas propriedades.

Assim, quando comparamos dois números, pela tricotomia sabemos que um deles é maior do que o outro ou ambos são iguais.

Existe um símbolo matemático que transforma as três possibilidades da tricotomia em apenas duas, pois agrega a ele a possibilidade da igualdade: este símbolo é o 'menor ou igual a', denotado por $\leq$. Então, quando consideramos dois números naturais quaisquer m e n, podemos afirmar que ou $m \leq n$ (m menor ou igual a n) ou $m \geq n$ (m maior ou igual a n).

4 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

A multiplicação entre dois números naturais m e n parte da ideia de adicionarmos m n vezes. Vamos defini-la a seguir:

DEFINICÃO 1.2.3: Seja m um número natural. Então

a) $m \cdot 1 = m$
b) $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$, para todo $n \in N$.

Observe que, com esta definição, o produto de dois números naturais m e n, $m \cdot n$, está bem definido. De fato, fixemos m um número natural qualquer. Então, dado n outro número natural, temos duas situações para considerar:

(i) $n = 1$. Neste caso, pela definição 1.2.3 a, $m \cdot n = m \cdot 1 = m$.
(ii) $n \neq 1$. Então existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $n = \sigma(p)$ e, pela definição 1.2.3 b, $m \cdot n = m \cdot \sigma(p) = m \cdot p + m$.

Estamos então em condições de enunciarmos e provarmos todas as propriedades da multiplicação de números naturais. Seguindo a mesma metodologia da adição, apresentaremos algumas das demonstrações e deixaremos outras como exercício.

PROPOSIÇÃO 1.2.10 (Distributividade): Dados três números naturais m, n e p, $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

Demonstração:

Utilizaremos o Princípio de Indução para fazermos esta demonstração.

Seja X o conjunto de todos os números naturais p para os quais vale $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$, quaisquer que sejam m e n dois números naturais.

Note que o elemento 1 pertence ao conjunto X pois

$$\mathbf{m \cdot (n + 1) = m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m = m \cdot n + m \cdot 1}$$

Consideremos então um número natural k que pertence a X e vamos mostrar que $\sigma(k)$ também pertence a X.

$\mathbf{m \cdot (n + \sigma(k)) = m \cdot (n + (k + 1))}$	Associatividade de adição
$\mathbf{= m \cdot ((n + k) + 1)}$	
$\mathbf{= m \cdot (n + k) + m \cdot 1}$	O elemento 1 pertence a X

Mas k pertence a X, ou seja, $\mathbf{m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{m \cdot (n + \sigma(k))} &= \mathbf{(m \cdot n + m \cdot k) + m \cdot 1} && \text{Associatividade de adição} \\ &= \mathbf{m \cdot n + (m \cdot k + m \cdot 1)} \\ &= \mathbf{m \cdot n + m \cdot (k + 1)} && \text{O elemento 1 pertence a X} \\ &= \mathbf{m \cdot n + m \cdot \sigma(k)} \end{aligned}$$

Assim, **σ(k)** pertence a X e, portanto, pelo Princípio da Indução, X = **N**.

PROPOSIÇÃO 1.2.11 (Associatividade): Dados três números naturais m, n e p, $\mathbf{m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p}$.

Demonstração:

Utilizaremos o Princípio de Indução para fazermos esta demonstração.

Seja X o conjunto de todos os números naturais p para os quais vale $\mathbf{m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p}$, quaisquer que sejam m e n dois números naturais.

Note que o elemento 1 pertence a X, pois pela Definição 1.2.3 a, $\mathbf{m \cdot (n \cdot 1) = m \cdot n = (m \cdot n) \cdot 1}$

Consideremos então um elemento k pertencente a X e vamos mostrar que **σ(k)** também pertence a X. Note que

$$\begin{aligned} \mathbf{m \cdot (n + \sigma(k))} &= \mathbf{m \cdot (n \cdot (k + 1))} \\ &= \mathbf{m \cdot (n \cdot k + n)} \\ &= \mathbf{m \cdot (n \cdot k) + m \cdot n} \end{aligned}$$

Agora k pertence a X, ou seja, $\mathbf{m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{m \cdot (n \cdot \sigma(k))} &= \mathbf{(m \cdot n) \cdot k + m \cdot n} \\ &= \mathbf{(m \cdot n) \cdot k + (m \cdot n) \cdot 1} \\ &= \mathbf{(m \cdot n) \cdot (k + 1)} \\ &= \mathbf{(m \cdot n) \cdot \sigma(k)} \end{aligned}$$

Segue que realmente **σ(k)** pertence a X e, portanto, X = N.

Enunciaremos a seguir as outras propriedades da multiplicação de números naturais, mas deixaremos as demonstrações a seu cargo, como exercício, uma vez que todas elas podem ser provadas a partir do Princípio da Indução.

PROPOSIÇÃO 1.2.12 (Comutatividade): Dados dois números naturais m e n, temos que $\mathbf{m \cdot n = n \cdot m}$.

PROPOSIÇÃO 1.2.13 (Lei do corte): Sejam m, n e p três números naturais. Se $\mathbf{m \cdot n = n \cdot m}$, então m = n.

PROPOSIÇÃO 1.2.14 (Monotonicidade): Se m e n forem dois números naturais tais que m < n, então $\mathbf{m \cdot p < n \cdot p}$ para todo número natural p.

Na definição 1.2.2, enunciamos a *relação de ordem* entre dois números naturais. O que faremos a seguir é aprofundar um pouco mais este conceito, mostrando que, na verdade, esta relação de ordem nos garante a existência de um número natural que é menor do que qualquer outro número. Mais qualquer subconjunto X de **N** também pode ser ordenado, possuindo um número que será menor do que todos os outros.

5 O PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

Consideremos X como sendo um subconjunto de **N**. Dizemos que um elemento n de X é o menor elemento de X se $n \leq m$ qualquer que seja m pertencente a X. Esse menor elemento de X é chamado de elemento mínimo de X.

Observe que este elemento mínimo é único: de fato, suponhamos que existam dois números naturais m e p em X tais que ambos são elementos mínimos de X. Assim, $m \leq n$ qualquer que seja n pertencente a X: em particular, $m \leq p$. Por outro lado, p também é o menor elemento de X, implicando em $p \leq n$, qualquer que seja n pertencente a X: em particular $p \leq m$. Portanto, $m \leq p$ e $p \leq m$, ou seja, m = p.

Analogamente, chamamos de máximo elemento de X ao maior elemento de X, isto é, ao número natural m tal que $m \geq n$ qualquer que seja n elemento de X. Este elemento, se existir, também é único (demonstre!).

Já sabíamos que o conjunto dos números naturais **N** possui um elemento que é menor que qualquer outro: por definição, este elemento é o número 1 (lembre-se que ele é o único número natural que não é sucessor de outro). Em relação ao máximo, isto não é verdade. Pela própria definição de sucessor, vimos que, para qualquer elemento n de X existe o seu sucessor $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)}$, e $n \leq \boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)}$ (na verdade, $n < \boldsymbol{\sigma}\mathbf{(n)}$. Sendo assim, existem subconjuntos de **N** que também não possuem elemento máximo.

O fato de **N** possuir elemento mínimo nos garante que qualquer subconjunto X de **N** também possui elemento mínimo. Esta afirmação é conhecida como Princípio da Boa Ordenação e será enunciado a seguir.

A demonstração do teorema a seguir não é trivial. Por isso, recomendamos que você a leia com atenção e, se necessário, a releia algumas vezes. Optamos por mantê-la no texto por utilizarmos um argumento que aparecerá novamente ao longo destas notas. Bom trabalho!

TEOREMA 1.2.1 (Princípio da Boa Ordenação): Todo subconjunto não vazio A contido no conjunto dos números naturais **N** possui elemento mínimo.

Demonstração:

Seja A um subconjunto não vazio de **N**.

Paralelamente, para cada número natural n, consideremos o seguinte conjunto associado:

$$\mathbf{I_n = \{p \in N \mid 1 \leq p \leq n\}},$$

ou seja, o conjunto de todos os números naturais maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a n. Ainda, se n > 2, $\mathbf{I_n = \{ 1, 2, ..., n\}}$.

Vamos agora considerar mais um conjunto: o conjunto X formado por todos os números naturais n tais que $\mathbf{I_n}$ esteja contido em N - A. Em outras palavras, se n pertence a X, n não pertence a A e qualquer número natural p tal que 1 < p < n também não pertence a A.

Por exemplo, suponhamos A = {4, 5, 6}. Então os números n = 4, n = 5 e n = 6 pertencem ao conjunto A. Consideremos agora os conjuntos $\mathbf{I_4 = \{1, 2, 3, 4\}}$, $\mathbf{I_5 = \{1, 2, 3, 5\}}$, $\mathbf{I_6 = \{1, 2, 3, 5, 6\}}$. Note nenhum destes conjuntos está contido em N-A, pois todos têm pelo menos um elemento em comum com A. Neste caso, $\mathbf{X = \{1, 2, 3, 7, 8, ...\}}$.

A ideia será mostrar que existe algum n em X tal que n + 1 pertença a A e este será o elemento mínimo de A.

Sabemos que A é não vazio.

Se o número natural 1 pertencer a A, não teremos mais o que demonstrar, pois 1 será o elemento mínimo de A. Suponhamos então que 1 não pertence a A e, portanto, pertence a X. Por outro lado, como o conjunto A é não vazio, X é um subconjunto próprio de N, isto é, tem algum número natural que não pertence a X. Então temos que:

a) 1 pertence a X
b) $X \neq N$

Estas duas afirmações significam que X não satisfaz o Princípio da Indução: de fato, se satisfizesse, o fato de 1 pertencer a X, implicaria em 2 pertencer a X, em 3 pertencer a X e assim por diante, implicando em X = N.

Desta forma, uma das hipóteses do Axioma não foi contemplada. Como 1 pertence a X, segue que existe algum número natural m que pertence a X, mas tal que m + 1 não pertence a X (se pertencesse, X teria que ser igual a N). Agora, se todos os números menores do que m+1 pertencem a X , mas m+1 não pertence a X, significa que m+1 necessariamente pertence a A (observe como X foi criado!). Logo m + 1 é o menor elemento de A, e, portanto, A tem um elemento mínimo, CQD.

EXEMPLO: Voltemos ao exemplo A = {4, 5, 6}. Vimos que, neste caso, **X = {1, 2, 3, 7, 8, ...}** Então,

$\mathbf{1 \in X \Rightarrow (1+1) \in X}$
$\mathbf{2 \in X \Rightarrow (2+1) \in X}$
$\mathbf{3 \in X \Rightarrow (3+1) \notin X}$

Como 3 + 1 = 4 não pertence a X, segue que 4 pertence a A e, portanto, 4 é o elemento mínimo de A.

Deste teorema, segue o resultado conhecido como Segundo Princípio da Indução.

TEOREMA 1.2.2 (Segundo Princípio da Indução): Seja X um subconjunto de **N** que possui a seguinte propriedade: dado $n \in \mathbf{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então X contém n. Então $X = \mathbf{N}$.

Vamos entender esta afirmação: consideremos inicialmente n = 5. O conjunto X teria então todos os elementos menores que 5 e, pela sua propriedade, também contém 5; se n = 6, X teria todos os números naturais até 6 e, pela propriedade de X, conteria 6 também, e assim por diante. Como não fixamos um valor n específico, mas estamos pensando em qualquer número natural n, esta propriedade tem que valer para todo n natural. Logo X é o próprio conjunto dos números naturais.

Demonstração:

A demonstração deste teorema é feita por absurdo.

Seja X um subconjunto de **N** que possui a propriedade: dado $n \in \mathbf{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então X contém n. Vamos supor então que X seja diferente de **N**. Como X é um subconjunto de **N**, existe pelo menos um elemento de **N** que não está em X. Se considerarmos então o conjunto Y formado por todos os elementos de **N** que não estão em X, segue que Y tem pelo menos um elemento. Logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um número natural n em Y que é menor do que todos os outros. Assim, qualquer elemento m tal que m < n, m não pertenceria a Y e, portanto, estaria em X.

Por outro lado, X tem a propriedade que, se m pertence a X e m < n, n necessariamente pertence a X: logo n pertence tanto a Y como a X, o que é uma contradição.

Segue que Y é um conjunto vazio e, portanto, X = **N**, CQD.

A vantagem do Segundo Princípio de Indução é que ele nos garante que se conseguirmos mostrar que o fato de uma propriedade ser válida para um conjunto de números naturais menores do que um dado valor n, ela é válida para n, então ela é válida para qualquer número natural. Isto nos dá uma boa ferramenta para utilizarmos em demonstrações. Não nos deteremos neste resultado agora por fugir um pouco dos objetivos deste Caderno de Estudos, mas você pode encontrar vários exemplos de sua aplicação em (LIMA, 2010).

RESUMO DO TÓPICO 2

Vamos, a seguir, relembrar brevemente o que vimos neste tópico.

- As propriedades do conjunto dos números naturais podem ser demonstradas a partir dos axiomas de Peano.

- Um dos axiomas de Peano é justamente o princípio da indução, já visto por nós como método de demonstração.

- Todo número natural n tem sucessor e é sucessor de alguém, salvo o número 1, que não tem esta segunda propriedade.

- A adição de números naturais e a multiplicação de números naturais podem ser definidas a partir do conceito de número sucessor.

- O conjunto dos números naturais é bem ordenado, através do conceito de 'menor que'.

- Ao compararmos dois números naturais, obrigatoriamente ou um é menor do que o outro ou eles são iguais (propriedade da tricotomia).

- O Princípio da Boa Ordenação nos garante que qualquer subconjunto não vazio dos números naturais possui um elemento mínimo.

- O mesmo Princípio da Boa Ordenação tem como consequência imediata o Segundo Princípio da Indução, que é uma boa ferramenta matemática a ser utilizada em demonstrações.

AUTOATIVIDADE

Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico através de alguns exercícios.

1 Demonstre, utilizando o Princípio da Indução, as seguintes propriedades da adição de números naturais:

a) Dados dois números naturais m e n, segue que m + n = n + m (comutatividade).
b) Sejam m, n e p três números naturais quaisquer, se m + n = m + p, então n = p (lei do corte).

2 Demonstre a propriedade de tricotomia para a relação de ordem:
Dados dois números naturais m e n, uma e apenas uma das afirmações a seguir ocorre: ou m = n; ou m < n; ou m > n.

3 Demonstre a propriedade comutativa da multiplicação de números naturais.

4 Demonstre a monotonicidade para a multiplicação de números naturais.

5 Seja X um subconjunto de **N** que possui elemento máximo. Mostre que este elemento máximo é único (unicidade do máximo de X).

UNIDADE 1

TÓPICO 3

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

1 INTRODUÇÃO

Até agora, estudamos o conjunto dos números naturais **N**. Vimos que este conjunto (assim como qualquer subconjunto próprio) possui um elemento mínimo, mas não necessariamente possui um elemento máximo, ou seja, um número natural que é maior do que todos os outros. Vamos agora estudar estas duas categorias de conjuntos: os que possuem um elemento máximo e os que não o possuem. Veremos que esta noção pode ser expandida para além dos números naturais através da importante ferramenta conhecida como funções.

Todos os resultados que veremos a seguir utilizarão funções em seu enunciado e em suas demonstrações. Portanto, se você não estiver familiarizado com este conceito, revisite seu Caderno de Introdução ao Cálculo.

Cabe salientar também que algumas demonstrações presentes neste tópico contém certo grau de complexidades. Recomendamos então que você tente reproduzi-las para um caso particular, fixando um conjunto, ou o tamanho dele, para entender melhor o processo de demonstração.

2 CONJUNTOS FINITOS

Considere o conjunto A, formado pelos divisores de 12, e o conjunto B, formado por todos os números pares: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8,\ldots\}$. Você certamente já identificou o conjunto A como sendo um conjunto finito, pois possui seis elementos, e B como um conjunto infinito, pois possui infinitos elementos. Ou seja, intuitivamente, você já conhece os dois conceitos que abordaremos agora. Vamos agora formalizá-los a partir do que vimos no tópico anterior. Para isso, consideraremos novamente o conjunto I_n composto por todos os números naturais de 1 até n.

$$\mathbf{I_n = \{1, 2, 3 ..., n\}}$$
$$\mathbf{= \{p \in N \mid 1 \leq p \leq n\}}$$

DEFINIÇÃO 1.3.1: Dizemos que um conjunto A é finito se A for um conjunto vazio ou se existe uma função bijetora φ: $\mathbf{I_n} \rightarrow \mathbf{A}$ para algum n pertencente a **N**. Assim, se A for um conjunto vazio, diremos que A tem zero elementos; se A for um conjunto não vazio finito, diremos que A tem n elementos.

EXEMPLO: Considere o conjunto A = {a, e, i, o, u}. Em princípio, não sabemos se ele é finito. Vamos então aplicar a definição anterior para mostrarmos que realmente ele é.

Tomando n = 5, definimos a função φ: $\mathbf{I_5} \rightarrow \mathbf{A}$ da seguinte forma:

φ**(1) = a**; φ**(2) = e**, φ**(3) = i**, φ**(4) = o**, φ**(5) = u**.

Note que a função que definimos é sobrejetora, pois todos os elementos do conjunto A estão associados a um elemento de $\mathbf{I_5}$, e também é injetora, pois cada elemento de A está associado a apenas um elemento de $\mathbf{I_5}$. Segue φ é sobrejetora e, portanto, bijetora. Logo A é um conjunto finito, com 5 elementos.

Observe que, pela definição de conjunto finito, podemos concluir que o próprio conjunto $\mathbf{I_n}$ tem n elementos.

O fato de I_n ter n elementos não deve ter lhe causado surpresa: pelo contrário, deve ter parecido óbvio! Mas lembre-se que na Matemática e, principalmente, em Análise Matemática, o óbvio também deve ser demonstrado.

Vamos considerar um conjunto A não vazio finito e suponhamos que A tenha n elementos.Então a bijeção φ vincula cada elemento de $\mathbf{I_n}$ a um único elemento de A:

$$\begin{cases} \varphi(1) = X_1 \in A \\ \varphi(2) = X_2 \in A \\ \quad\quad \vdots \\ \varphi(n) = X_n \in A \end{cases}$$

Ou seja, podemos representar A como $\mathbf{A = \{X_1, X_2, ..., X_n\}}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito. Assim, se B for um conjunto finito de m elementos, podemos representá-lo como $\mathbf{B = \{X_1, X_2, ..., X_m\}}$.

EXEMPLO: Voltando ao exemplo anterior, poderíamos expressar A como o conjunto $\mathbf{A = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}}$, onde $\mathbf{X_1 = a}$, $\mathbf{X_2 = e}$, $\mathbf{X_3 = i}$, $\mathbf{X_4 = o}$, $\mathbf{X_5 = u}$, de acordo com o comentário anterior. É claro que, neste caso, não faria sentido, uma vez que o conjunto A possui um número pequeno de elementos e nós sabemos exatamente quem são eles. Mas quando o conjunto é muito grande, ou quando queremos trabalhar com um conjunto finito qualquer, genérico, lançamos mão deste artifício para fixá-lo.

O teorema que enunciaremos a seguir nos garante que o único subconjunto de $\mathbf{I_n}$ que possui n elementos é ele próprio.

TEOREMA 1.3.1: Seja A um subconjunto de $\mathbf{I_n}$. Se existir uma bijeção φ: $\mathbf{I_n \to A}$, então $A = \mathbf{I_n}$.

Demonstração:

Vamos utilizar o método de indução sobre n para provarmos este resultado.

Consideremos n = 1.

Então $\mathbf{I_1 = \{1\}}$ e, como existe uma bijeção φ: $\mathbf{I_1 \to A}$, o conjunto A só possui um elemento: $\mathbf{A = \{X_1\}}$. Por outro lado, A é subconjunto não vazio de $\mathbf{I_1 = \{1\}}$, ou seja, todos os elementos de A também são elementos de $\mathbf{I_1}$. Segue que $\mathbf{X_1 = 1}$ e, portanto, $\mathbf{A = I_1}$.

Suponhamos agora que o resultado vale para **n = k**, e vamos mostrar que, neste caso, também vale para **n = k+1**.

Seja então **A** um conjunto com **k+1** elementos. Seja ainda $\varphi : \mathbf{I_{k+1} \to A}$ a bijeção entre $\mathbf{I_{k+1}}$ e **A** e $\varphi\mathbf{(k + 1) = a}$. Então, se considerarmos a restrição da função φ ao conjunto $\mathbf{I_k}$, teremos uma das situações a seguir:

i) $\varphi' : \mathbf{I_k \to A - \{a\}}$.

Neste caso, pela hipótese de indução, $\mathbf{A - \{a\} = I_k}$. Logo, pela definição de $\mathbf{I_{k+1}}$, **(k+1) = a** e $\mathbf{I_{k+1} = I_k \cup \{k+1\} = I_k \cup \{a\} = (A - \{a\}) \cup \{a\} = A}$.

ii) $\varphi' : \mathbf{I_k \to B}$, onde B é um subconjunto de A que contém o elemento ‘a’.

Note que, como B é um subconjunto de A que contém ‘a’, existe um ponto ‘q’ de A que não pertence a B.

Por outro lado, k + 1 é um elemento de B (pois $B \subset A \subset I_{k+1}$, sendo que B tem a mesma quantidade de elementos que I_k, e 'a' pertence a B) e existe um elemento p pertencente a I_k tal que $\varphi'(\mathbf{p}) = \mathbf{k + 1}$.

Consideremos então outra função $\Psi : \mathbf{I_{k+1}} \rightarrow$ tal que

$$\begin{cases} \Psi(x) = \varphi(x), \text{ para todo x diferente de p e x diferente de k+1} \\ \Psi(p) = q \\ \Psi(k+1) = k+1. \end{cases}$$

Note que apenas "ajeitamos" a função φ de forma que o ponto p seja levado no ponto q e k + 1, que é o ponto que era a imagem de p, nele mesmo. Tomando agora a restrição desta função ao conjunto I_k, teremos que $\Psi' : \mathbf{I_k} \rightarrow A - \{k+1\}$. Logo, pela hipótese de indução, $\mathbf{I_k = A - \{k+1\}}$ e $\mathbf{I_{k+1} = I_k \cup \{k+1\} = A}$, como queríamos demonstrar.

Para entender melhor a construção que foi feita, que tal dar um valor para k (digamos, k = 3) e tentar reproduzir a demonstração para este valor?

Você pode ter achado o enunciado deste teorema um pouco estranho, pois é óbvio que não existe um subconjunto de $\mathbf{I_n}$ que tenha n elementos a não ser ele próprio, mas esta obviedade vem do fato de estarmos acostumados a trabalhar com o conjunto dos números naturais. Quando falarmos em enumerabilidade no próximo tópico, você verá que de fato existem conjuntos que admitem cópias como subconjuntos próprios, por mais bizarro que isto possa parecer!

Como consequência imediata deste teorema, temos que se tivermos uma bijeção $\varphi : \mathbf{I_m} \rightarrow \mathbf{I_n}$, segue que $\mathbf{I_m = I_n}$ e, portanto m = n.

Vimos no Teorema 1.3.1 que, dado um número natural n, não existe subconjunto próprio de $\mathbf{I_n}$ que possua n elementos. Mas também sabemos que qualquer conjunto finito X pode ser pensado de certa forma como uma cópia de $\mathbf{I_n}$ para algum n.

Você se lembra do que significa subconjunto próprio? Dado um conjunto X e um subconjunto Y de X, dizemos que Y é um subconjunto próprio de X se existir algum elemento de X que não pertença a Y, ou seja, Y não é X.

O resultado a seguir generaliza o Teorema para um conjunto finito X qualquer, garantindo que ele não possui subconjunto próprio com mesmo número de elementos.

COROLÁRIO 1.3.1. Sejam X um conjunto finito e Y um subconjunto próprio de X, então não existe bijeção $\mathbf{f : X \rightarrow Y}$.

Demonstração:

Sejam X um conjunto finito e Y um subconjunto próprio de X. Vamos supor, por absurdo, que existe uma bijeção $\mathbf{f : X \rightarrow Y}$.

Sabemos que X é finito e, portanto, existe uma bijeção φ $\mathbf{: I_n \rightarrow X}$ para algum número natural n. Como a função φ é uma bijeção, a sua função inversa $\varphi^{-1} : X \rightarrow \mathbf{I_n}$ está bem definida. Podemos considerar $\varphi^{-1}(Y)$, isto é, φ^{-1} restrito ao conjunto Y. Então $\varphi^{-1}(Y)$ é um subconjunto próprio de $\mathbf{I_n}$ e φ, quando restrita a $\varphi^{-1}(Y)$, é uma bijeção de $\varphi^{-1}(Y)$ em Y. Observe a situação que temos agora através do esquema a seguir:

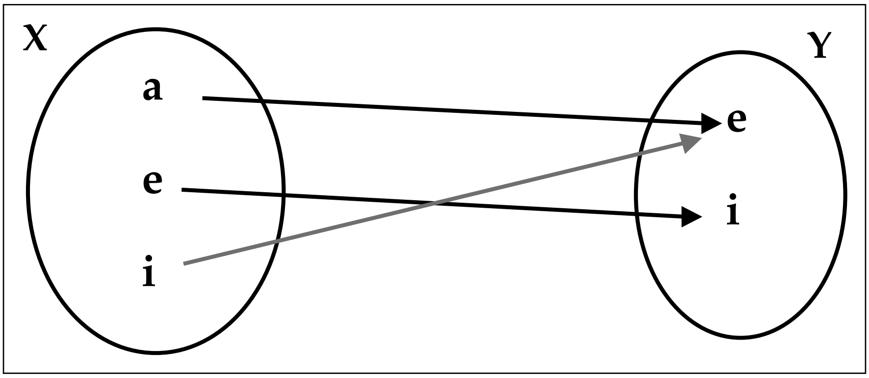
$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{f}"] & \mathbf{Y} \\ \mathbf{I_n} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dashed, "\mathbf{g}"] & \varphi^{-1}\ \mathbf{(Y)} \arrow[u, "\varphi'"'] \end{tikzcd}$$

Assim, a função composta $g = (\varphi')^{-1} \cdot f \cdot \varphi$ está bem definida e é uma bijeção de $\mathbf{I_n}$ em $\varphi^{-1}(Y)$, que é um subconjunto próprio de $\mathbf{I_n}$, contradizendo o Teorema 1.3.1. Segue, portanto que não existe tal bijeção f entre X e Y, CQD.

EXEMPLO: Consideremos o conjunto X = {a, e, i}. Sabemos que A possui os seguintes subconjuntos próprios: $\varnothing$, {a}, {e}, {i}, {a, e}, {a, i} {e, i}.

Vamos fixar o subconjunto Y = {e, i} e tentar construir uma bijeção f : X → Y.

Suponhamos que f (a) = e f(e) = i.



Para que f seja função, precisamos encontrar alguém em Y que esteja associado a f (i) e, como Y só tem as letras e e i como elementos, vamos associar f(i) = e.

Definida a função f, note que f não é injetora, pois dois elementos de X (e e i) estão associados a um único elemento de Y (i). Na verdade, este fato independe da escolha que fizemos para f(i): se associarmos ele a i, recairemos em uma situação similar. Assim, não é possível construir uma bijeção entre X e Y.

Partimos da suposição Y = {e, i}. Na verdade, a impossibilidade de construirmos a bijeção f independe da escolha de Y. Se você não estiver convencido disto, tente construir uma bijeção entre X e outro dos seus subconjuntos próprios.

Intuitivamente, você deve ter percebido no exemplo anterior que a impossibilidade de se construir uma bijeção entre um conjunto X e um subconjunto próprio de X se deve ao fato de que qualquer subconjunto próprio de X tem menos elementos do que X. Entretanto, não pudemos utilizar ainda este argumento, uma vez que ainda não provamos que ele vale! Mas agora sim, estamos em condições de provar que qualquer subconjunto de um conjunto finito X tem, no máximo, o mesmo número de elementos de X.

TEOREMA 1.3.2. Seja X um conjunto finito e Y um subconjunto de X. Então Y também é finito e possui no máximo o mesmo número de elementos de X.

Demonstração:

Seja X um conjunto finito. Então, para algum número natural n, existe uma bijeção $\varphi : \mathbf{I_n} \to \mathbf{X}$. Assim, se provarmos o resultado para $\mathbf{I_n}$, teremos provado para X. Vamos então demonstrar o resultado através do método de indução em n.

Considerando n =1, sabemos que os únicos subconjuntos de $\mathbf{I_1}$ são o conjunto vazio e o próprio $\mathbf{I_1}$. Por definição, o conjunto vazio tem 0 elementos, e, portanto, o resultado sai imediatamente.

Suponhamos agora que o resultado é válido para n = k, e vamos prová-lo para n = k+1.

Seja Y um subconjunto de $\mathbf{I}_{k+1}$. Se Y for um subconjunto de $\mathbf{I}_k$, pela hipótese de indução, Y tem no máximo k elementos e o teorema está demonstrado.

Suponhamos então que Y não é subconjunto de $\mathbf{I}_k$; neste caso, o número k + 1 pertence a Y, e o conjunto Y – {k+1} é um subconjunto de $\mathbf{I}_k$. Temos então duas situações a considerar:

(i) Y - {k +1} = ∅: logo, Y = {k + 1} e, portanto, Y tem apenas um elemento.
(ii) Y - {k +1} ≠ ∅. Neste caso, existe uma bijeção $\varphi : \mathbf{I}_p \to \mathbf{Y - \{k + 1\}}$ para algum um número natural $p \le k$. Vamos então construir a seguinte função: $\Psi: \mathbf{I}_{p+1} \to \mathbf{Y}$ tal que

$$\begin{cases} \Psi(x) = \varphi(x), \text{ para todo pertencente a } \mathbf{I}_p \\ \Psi(p+1) = \varphi(k+1), \end{cases}$$

Claramente, esta função é uma bijeção e, por definição, temos que o conjunto Y é finito, com p+1 elementos. Como p era menor ou igual a k, segue que p + 1 é menor ou igual a k + 1. Portanto, Y é um subconjunto de $\mathbf{I}_{k+1}$ e possui no máximo k + 1, elementos, CQD.

UNI

Novamente, deixamos a dica para você fixar um valor para n e reproduzir a demonstração para este caso particular.

O Corolário 1.3.1 nos garante que, dado um conjunto finito X com n elementos, se Y for um subconjunto de X que tiver n elementos, necessariamente, X = Y. Para mostrar, isso, basta seguir a ideia do Teorema anterior e considerar $X = I_n$.

Outros dois resultados saem como consequências diretas deste Teorema:

COROLÁRIO 1.3.2. Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \to Y$ uma função injetora. Se Y for um conjunto finito, então X também será e o número de elementos de X será menor ou igual ao número de elementos de Y.

Demonstração:

Deixamos esta demonstração a seu cargo.

Note que já vimos intuitivamente que este corolário vale no último exemplo que trabalhamos, quando mostramos que não era possível construir uma bijeção entre um conjunto X e um subconjunto próprio Y de X.

COROLÁRIO 1.3.3. Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se X for um conjunto finito, então Y também será e o número de elementos de Y será menor ou igual ao número de elementos de X.

Demonstração:

Deixamos esta demonstração a seu cargo.

Até agora trabalhamos com conjuntos finitos quaisquer. Nosso objetivo agora será estudarmos o conjunto dos números naturais N e seus subconjuntos e, para isso, precisaremos de mais uma definição: a de conjuntos infinitos.

3 CONJUNTOS INFINITOS E OS SUBCONJUNTOS DE N

Dizemos que um conjunto é infinito quando ele não é finito. Esta simples frase e todos os resultados que vimos até agora nos dão uma boa caracterização dos conjuntos infinitos. Observe:

- ✓ Um conjunto X é infinito se não existir uma bijeção $\varphi : \mathbf{I_n} \rightarrow X$, qualquer que seja o número natural n.
- ✓ O conjunto X será infinito se, dado Y um conjunto próprio de X, existir uma bijeção f: $\mathbf{X} \rightarrow Y$.
- ✓ Sejam X e Y dois conjuntos e f: $\mathbf{X} \rightarrow Y$ uma função injetora. Se X for um conjunto infinito, então Y também será.
- ✓ Sejam X e Y dois conjuntos e f: $\mathbf{X} \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se Y for um conjunto infinito, então X também será.

O melhor exemplo de conjunto infinito que podemos considerar é o conjunto dos números naturais N. Vamos mostrar que ele é infinito utilizando os dois primeiros resultados que mencionamos.

EXEMPLO 1: O conjunto N é infinito.

De fato, seja n um número natural qualquer e seja $\varphi : \mathbf{I_n} \rightarrow N$ uma função qualquer.

Se considerarmos o número $p = \varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n)$, teremos que $p > \varphi(x)$ qualquer que seja x pertencente a $\mathbf{I_n}$. Logo, encontramos um número natural p que não pertence à imagem de φ, o que implica em φ não ser sobrejetora. Como a função φ foi escolhida aleatoriamente, mostramos que todas as funções definidas de $\mathbf{I_n}$ em N não são bijetoras, qualquer que seja n. Portanto, N é um conjunto infinito.

EXEMPLO 2: Outra demonstração de que N é um conjunto infinito.

Considere P como sendo o conjunto de todos os números naturais pares. Logo, P é um subconjunto próprio de N (3 pertence a N, mas não pertence a P, por exemplo).

Considere agora a função f: N $\rightarrow$ P tal que f(n) = 2n, para todo n natural.

Note que f é injetora, pois se para dois números naturais n e m, f(m) = f(n), então temos que 2n = 2m e, pela lei do cancelamento, n = m.

A função f também é sobrejetora porque, qualquer que seja p um número par, sabemos que ele pode ser escrito como p = 2q, para algum número natural q, e, portanto, p = f(q) para algum número natural q.

Logo encontramos uma função bijetora definida de N em um subconjunto próprio de N. Segue que N é um conjunto infinito.

Os próximos resultados que abordaremos nos darão as características dos subconjuntos do conjunto dos números naturais N. Para isso, precisamos de mais uma definição:

DEFINIÇÃO 1.3.2: Seja X um subconjunto de N. Dizemos que X é limitado se existir um número natural p tal que n $\leq$ p para todo n pertencente a X.

EXEMPLO: O conjunto X = {2, 3, 5, 7, 11} é limitado, pois qualquer elemento de X é menor ou igual a 11.

Dizermos que um subconjunto de N é limitado é o mesmo que dizer que ele é finito. Entretanto, estes dois conceitos não são iguais. Um subconjunto dos números reais, por exemplo, pode ser limitado e não ser finito, conforme veremos mais a frente.

TEOREMA 1.3.3 Seja X um subconjunto de N não vazio. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) X é finito.
(b) X é limitado.
(c) X possui um maior elemento.

Demonstração:

Para provarmos este resultado, precisaríamos mostrar que (a) implica (b) e vice-versa, que (b) implica (c) e vice-versa, e que (a) implica (c) e vice-versa. Há uma maneira mais rápida de fazer isto: basta mostrar que (a) implica (b), que (b) implica (c) e que (c) implica (a). As outras implicações saem por transitividade.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Seja X um subconjunto finito de N. Então existe um número natural n tal que $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Se considerarmos então o número natural $p = x_1 + x_2 + ... + x_n$, teremos que $p \geq x_k$, para k=1, 2, …, n. Portanto, pela definição, X é limitado.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Suponhamos que X seja um subconjunto de N limitado. Então existe um número natural p tal que $p \geq x$ para todo x pertencente a X.

Consideremos o conjunto $Y = \{p \in N \mid p \geq n_2$ para todo $n \in X\}$. Note que Y é não vazio, pois X é limitado. Além disso, pelo Princípio da Boa Ordenação (Teorema 1.2.1), existe um número q pertencente a Y que é o menor elemento deste conjunto. Vamos mostrar que q pertence a X (na verdade, q é o elemento p que estamos procurando).

Suponhamos por absurdo, que q não pertence a X. Então $q > x$, para todo x pertencente a X. Como o conjunto X é não vazio, $q > 1$ (pois, pelo menos, um elemento maior ou igual a 1 pertence a X). Logo q pode ser escrito como $q = q'+1$, para algum número natural q' e, consequentemente, $q' \geq x$ para todo elemento x de X. Temos então duas possibilidades:

(i) Se $q' \geq x$, para todo x pertencente a X, então $q' \in Y$ e é menor do que q, o que é um absurdo, uma vez que q é o menor elemento de Y por hipótese.
(ii) Então $q' < x$ para algum x em X. Neste caso, $q' < x$ e $q = q' + 1 \leq x$, isto é, q pertence a X: contradição, pois partimos do princípio que x não pertence a X.

Logo existe um elemento q em X tal que qualquer outro elemento de X é menor do que q. Segue que X tem elemento máximo.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Seja X um subconjunto de N que possui elemento máximo p. Então X é também subconjunto do conjunto I_p, que sabemos ser finito. Portanto, segue do Teorema 1.3.2 que X é finito, CQD.

Assim como existem os conjuntos infinitos, também existem os conjuntos ilimitados e para defini-los, basta negar a definição de conjunto limitado:

DEFINIÇÃO 1.3.3: Seja X um subconjunto de N. Dizemos que X é ilimitado se, para qualquer número natural n, existir um número p pertencente a X tal que $n \leq p$.

Logo, pelo teorema 1.3.3, os subconjuntos ilimitados de N são exatamente os conjuntos infinitos de N.

Novamente, esta afirmação é valida para números naturais, mas não é necessariamente verdadeira se considerarmos subconjuntos de números reais, por exemplo. Neste caso, existem conjuntos limitados que são infinitos.

Outra característica importante dos subconjuntos finitos de N é que, dados dois deles, podemos construir outros subconjuntos finitos a partir deles. Por exemplo, se X e Y forem dois subconjuntos finitos, a interseção de X e Y também será finita, pois $X \cap Y$ será subconjunto de X (e de Y) que é finito. Os próximos resultados nos fornecem outros conjuntos finitos que podem ser construídos a partir de 2, ou mais, conjuntos finitos.

TEOREMA 1.3.4 Sejam X e Y dois subconjuntos finitos de N disjuntos, isto é, sem elementos em comum, com m e n elementos, respectivamente. Então o conjunto formado pela união de X e Y, $X \cup Y$, é finito, e possui n+m elementos.

Demonstração:

Sejam X e Y dois subconjuntos finitos de N disjuntos com m e n elementos respectivamente e $\varphi : \mathbf{I_m} \rightarrow X$ e $\Psi : \mathbf{I_n} \rightarrow Y$ duas bijeções. Consideremos então a função $\omega : \mathbf{I_{m+n}} \rightarrow X \cup Y$ definida da seguinte forma:

$\omega(x) = \varphi(x)$, se $1 \leq x \leq m$
$\omega(x) = \Psi(x)$, se $m + 1 \leq x \leq m + n$.

Note que a função está bem definida, por X e Y são disjuntos e, pela mesma razão, é possível mostrar facilmente que ω é uma bijeção. Portanto, o conjunto $X \cup Y$, é finito, e possui n+m elementos, CQD.

COROLÁRIO 1.3.4 Sejam $X_1, X_2, ..., X_m$ conjuntos finitos dois a dois disjuntos com $n_1, n_2, ..., n_m$ elementos respectivamente. Então o conjunto $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ é finito, e possui $n_1 + n_2 + ... + n_m$ elementos.

Demonstração:

Basta estender o argumento utilizado na demonstração anterior para o caso de m conjuntos finitos.

COROLÁRIO 1.3.5 Sejam $X_1, X_2, ..., X_m$ conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos, com $n_1, n_2, ..., n_m$ elementos respectivamente. Então o conjunto $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ é finito, e possui no máximo $n_1 + n_2 + ... + n_m$ elementos.

Demonstração:

Sejam $X_1, X_2, ..., X_m$ conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos, com $n_1, n_2, ..., n_m$ elementos respectivamente e consideremos, para cada i entre 1 e m, os conjuntos $Y_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$. Note que cada conjunto Y_i é formado por pares ordenados e, pela forma como é construído, cada Y_i tem n_i elementos e $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ são dois a dois disjuntos (a segunda coordenada dos elementos de cada Y_i nos garante isso). Então, pelo corolário anterior, $Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup X_m$ é um conjunto finito de $n_1, n_2, ..., n_m$.

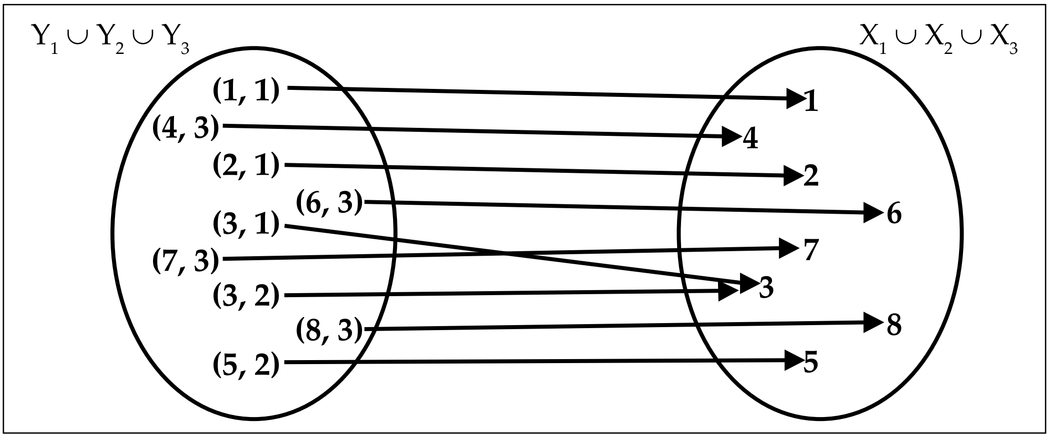
Consideremos agora a aplicação f: $Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_m \rightarrow X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ definida da seguinte forma: f(x, i) = x, para todo (x,i) elemento de $Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_m$. Claramente a função é sobrejetora e, como o domínio é finito, segue pelo Corolário 1.3.3 que é finito, e possui no máximo $n_1, n_2, ..., n_m$ elementos, CQD.

EXEMPLO: Consideremos os conjuntos $X_1 = \{1, 2, 3\}$, $X_2 = \{3, 5\}$ e $X_3 = \{4, 6, 7, 8\}$. Estes conjuntos têm, respectivamente, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ e $n_3 = 4$ elementos.

Consideremos então os conjuntos $Y_1 = \{(x,1)\ x \in X_1\} = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$, $Y_2 = \{(x,2)\ x \in X_2\} = \{(3,2), (5,2)\}$ e $Y_3 = \{(x,3)\ x \in X_3\} = \{(4,3), (6,3), (7,3), (8,3)\}$.

Estes conjuntos também têm 3, 2 e 4 elementos respectivamente e são dois a dois disjuntos, isto é, o elemento que pertence a um deles não pertence a outro.

Consideremos agora a função f: $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \rightarrow X_1 \cup X_2 \cup X_3$ tal que f (x, i) = x, para todo (x, i) em $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$.



Então f é sobrejetora e, como o domínio é finito, com exatamente 3 + 2 + 4 = 7 elementos, segue que $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ tem, no máximo, 7 elementos: na verdade, 6.

O corolário a seguir vai nos dar um resultado envolvendo pares ordenados. Se X_1 , X_2, ..., X_m forem conjuntos quaisquer,

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_m = \{(x_1 , x_2 , ..., x_m) \mid x_i \in X_i , 1 \leq i \leq m\}$$

A ideia da demonstração é parecida com a que foi feita no corolário anterior.

COROLÁRIO 1.3.6 Sejam $X_1, X_2, ..., X_m$ conjuntos finitos com $n_1, n_2, ..., n_m$ elementos respectivamente. Então o conjunto $X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ é finito, e possui $n_1 \cdot n_2 \cdot \ ... \ \cdot n_m$ elementos.

Demonstração:

Se supormos inicialmente que m = 2 e mostrarmos o resultado neste caso, teremos a validade do corolário para um m qualquer (basta repetir o argumento).

Vamos então supor que X e Y são dois conjuntos finitos com k e n elementos respectivamente, e vamos escrever Y como $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Consideremos então os conjuntos $X_i = X \times \{y_i\} = \{(x, y_i) \mid x \in X\}$. Claramente os conjuntos X_i são dois a dois disjuntos e possuem o mesmo número de elementos de X. Logo X x Y é finito e possui $k \cdot n$ elementos CQD.

Acabamos de estudar as principais características dos conjuntos finitos e infinitos. Ao longo deste Caderno de Estudos, voltaremos a falar nestes conjuntos não apenas no contexto dos números naturais, mas também quando tratarmos de números reais. Mas antes de começarmos o estudo desta categoria de números, precisamos aprender mais um conceito envolvendo conjuntos: o conceito de enumerabilidade, e é isso que faremos no próximo tópico.

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico, estudamos os conjuntos finitos e os conjuntos infinitos, mais precisamente:

- Dizemos que um conjunto A é finito se A for um conjunto vazio ou se existe uma função bijetora $\varphi : \mathbf{I_n} \rightarrow A$ para algum n pertencente a **N**. Assim, se A for um conjunto vazio, diremos que A tem zero elementos; se A for um conjunto não vazio finito, diremos que A tem n elementos.

- Se A não foi finito, dizemos que A é infinito.

- O conjunto dos números naturais N é infinito.

- Não existe bijeção entre um conjunto finito e um subconjunto próprio dele mesmo.

- Se existir uma bijeção entre um conjunto X e um subconjunto próprio seu, então X é infinito.

- Todo subconjunto de um conjunto finito X também é finito e possui, no máximo, o número de elementos que X possui.

- Sejam X e Y dois conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se Y for um conjunto finito, então X também será e o número de elementos de X será menor ou igual ao número de elementos de Y.

- Sejam X e Y dois conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ uma função injetora. Se X for um conjunto infinito, então Y também será.

- Sejam X e Y dois conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se X for um conjunto finito, então Y também será e o número de elementos de Y será menor ou igual ao número de elementos de X.

- Sejam X e Y dois conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Se Y for um conjunto infinito, então X também será.

- Seja X um subconjunto de N. Dizemos que X é limitado se existir um número natural p tal que $n \leq p$ para todo n pertencente a X. Caso contrário, X será dito ilimitado.

- Seja X um subconjunto de N não vazio. Então as seguintes afirmações são equivalentes:
  (a) X é finito.
  (b) X é limitado.
  (c) X possui um maior elemento.

- Sejam X_1 , X_2 , ..., X_m conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos, com n_1, n_2, ..., n_m elementos respectivamente. Então o conjunto $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ é finito, e possui no máximo $n_1 + n_2 + ... + n_m$ elementos. Caso os conjuntos sejam dois a dois disjuntos, a quantidade de elementos será exatamente $n_1 + n_2 + ... + n_m$.

- Sejam X_1 , X_2, ..., X_m conjuntos finitos com n_1, n_2, ..., n_m elementos respectivamente. Então o conjunto $X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ é finito, e possui $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ elementos.

AUTOATIVIDADE

Agora vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico por meio de alguns exercícios.

1 Mostre que o conjunto $A = \left\{\pi, \sqrt{2}, \frac{1}{2}, i\right\}$ é um conjunto finito via definição.

2 Prove que, dados dois números naturais m e n, se existir uma bijeção $\varphi : \mathbf{I_m} \to \mathbf{I_n}$, segue que $\mathbf{I_m} = \mathbf{I_n}$ e, portanto m = n. (Dica: suponha que m seja menor do que n e recaia no Teorema 1.3.1)

3 Mostre que se X e Y forem dois conjuntos tais que exista uma função injetora f: X → Y e se Y for um conjunto finito, então X também será finito e o número de elementos de X não excede o número de elementos de Y. (Dica: Utilize o fato de f ser um bijeção entre X e f(X) e o Teorema 1.3.2).

4 Mostre que se X e Y forem dois conjuntos tais que exista uma função sobrejetora f: X → Y e se X for um conjunto finito, então Y também será finito e o número de elementos de Y não excede o número de elementos de X. (Dica: Como f é sobrejetora, podemos considerar a função inversa a f e recaia no exercício anterior).

5 Mostre que N é um conjunto infinito construindo uma bijeção entre N e o conjunto dos números pares.

6 Mostre que os conjuntos dos números inteiros Z e dos números racionais Q também são conjuntos infinitos.

7 Mostre que a função ω definida no Teorema 1.3.4 é, de fato, uma bijeção.

CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior, estudamos os conjuntos finitos, infinitos, limitados e ilimitados. Quando abordamos estes conceitos no âmbito dos números naturais, eles dão conta de todas as situações que podem aparecer, afinal, um subconjunto de números naturais ou é finito, ou é infinito, ou é limitado, ou é ilimitado (e, portanto, infinito). Também vimos que os números naturais estão intimamente ligados com a ideia de contagem, uma vez que cada número tem um sucessor bem definido, bastando somar um para encontrá-lo.

Agora, começaremos nossa caminhada rumo ao estudo dos números reais. Neste conjunto, a ideia de contagem se torna um pouco mais vaga, pois agora o sucessor de 2 não será mais 3, aliás, nem é possível explicitá-lo: não seria 2,01, nem 2,0000000001 ou mesmo 2,00000000000000000001, certo? Por outro lado, o conjunto dos números naturais pode ser visto como subconjunto dos números reais e, portanto, dependendo do subconjunto que considerarmos, podemos recuperar a ideia de contagem.

Para entender melhor o que estamos querendo dizer, faz-se necessário introduzirmos um novo conceito chamado de enumerabilidade. A ideia é traçar um paralelo entre os números naturais e um dado subconjunto dos números reais. Nem sempre é possível, mas quando é, conseguimos trabalhar com este subconjunto de uma maneira parecida com a qual fazemos nos números naturais. Vamos ao trabalho!

2 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Intuitivamente, conjunto enumerável é aquele conjunto onde é possível contar os seus elementos. Nesse sentido, um conjunto enumerável pode ser visto como uma cópia do conjunto de números naturais N. Formalmente,

DEFINIÇÃO 1.4.1 Dizemos que um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e X. Chamamos cada bijeção $f: N \to X$ de enumeração de X.

Assim, qualquer conjunto X enumerável pode ser escrito como $\{f(1), f(2),..., f(n),...\}$. Mais ainda: se supomos $f(n) = x_n$ para cada n, com x_n pertencente a X, segue que X pode ser escrito como $\{X_1, X_2, ..., X_n, ...\}$.

EXEMPLO 1: O conjunto dos números naturais N é enumerável, pois a função identidade id:N $\rightarrow$ N é uma bijeção.

EXEMPLO 2: O conjunto dos números pares $X = \{2n \mid n \in N\}$ é enumerável, pois a função f:N $\rightarrow$ X tal que $f(n) = 2n$ é uma bijeção.

Veja que interessante o que mostramos no exemplo 2: X é um subconjunto próprio de N enumerável. O resultado a seguir generaliza este exemplo:

PROPOSIÇÃO 1.4.1 Todo subconjunto dos números naturais é enumerável.

Demonstração:

Seja X um subconjunto de N. Se X for finito, não precisamos demonstrar nada, pois, por definição, X é enumerável. Suponhamos então que X é infinito. Para mostrarmos que X é enumerável, precisamos construir uma bijeção f:N $\rightarrow$ X. Vamos então dividir nosso trabalho em 3 partes:

(i) Construir tal função f.
(ii) Mostrar que f é injetora.
(iii) Mostrar que f é sobrejetora.

(i) Vamos utilizar o princípio da indução para construir f.

Pelo Principio da Boa Ordenação (Teorema 1,.2.1), X possui um elemento mínimo que chamaremos de x_1. Consideremos então $f(1) = x_1$.

Novamente pelo princípio da Boa Ordenação, o conjunto $A_2 = X - \{x_1\}$ possui um elemento mínimo, que chamaremos de x_2: façamos então $f(2) = x_2$. Note que $x_1 < x_2$.

Suponhamos agora que construirmos f para todos os elementos de X até um dado n = k, com as seguintes características:

$f(k) = x_k$, onde x_k é o elemento mínimo do conjunto $A_k = X - \{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$, e $x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k$. Novamente, o conjunto $A_{k+1} = X - \{x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k\}$ não é vazio, pois X foi assumido ser infinito e, portanto, A_{k+1} possui um elemento mínimo X_{k+1} que é maior do que X_k: basta então definir $f(k+1) = X_{k+1}$!

(ii) Definida f, vamos mostrar que f é injetora. De fato, dados dois números naturais m e n distintos entre si, podemos supor sem perda de generalidade que m < n. Mas pela forma como f foi construída, $f(m) = x_m < x_n = f(n)$, ou seja, f(m) e f(n) são distintos entre si. Segue que f é de fato injetora.

(iii) Mostremos finalmente que f é sobrejetora. Seja x um elemento qualquer de X e suponhamos, por absurdo, que x não seja a imagem de nenhum número natural N ($x \notin f(N)$). Então esse elemento x pertence a cada um dos conjuntos A_n, ou seja,

$x > f(n)$, qualquer que fosse n. Então o conjunto infinito $f(N) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ seria limitado: mas isso é um absurdo, pois vimos que os subconjuntos infinitos de N são ilimitados (Teorema 1.3.3)! Logo f é sobrejetora, CQD.

EXEMPLO 3: O conjunto Z dos números inteiros é enumerável.

Para mostrar isto, vamos definir uma função $f: Z \to N$ e mostrar que ela é bijetora. Neste caso, a função inversa $f^{-1}: N \to Z$ satisfaz as condições da definição 1.4.1.

Consideremos a seguinte função: $f: Z \to N$ tal que $f(n) = 2n$ se $n > 0$ e $f(n) = -2n + 1$ se $n \leq 0$. Vamos dar alguns exemplos numéricos para entender como esta função funciona:

$$\begin{cases} f(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\ f(-1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 3 \\ f(2) = 2 \cdot 2 = 4 \\ f(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 5 \\ \vdots \end{cases}$$

Note que f é uma função injetora, pois dados x e y dois números inteiros tais que $f(x) = f(y)$, então, uma das três situações pode ocorrer:

(i) $2 \cdot x = 2 \cdot y$ e, neste caso $x = y$;
(ii) $-2 \cdot x + 1 = -2 \cdot y + 1$, implicando em $-2 \cdot x = -2 \cdot y$, ou seja, $x = y$.
(iii) $2 \cdot x = -2 \cdot y + 1$ (neste caso, x é um número positivo e $y \leq 0$). Então

$$\begin{aligned} &2 \cdot x = -2 \cdot y + 1 \\ &2 \cdot x + 2 \cdot y = 1 \\ &2 \cdot (x + y) = 1 \\ &x + y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mas não existem dois números inteiros que satisfaçam esta igualdade (1/2 nem número inteiro é!). Logo, (iii) não pode ocorrer.

Portanto, $x = y$.

Além disso, f é sobrejetora, pois, dado um número natural n, sabemos que n é um número par ou um número ímpar.

(i) Se n for um número par, existe um número natural x (e, portanto, inteiro) para o qual $n = 2x$ e, neste caso, $n = f(x)$.

(ii) Se n for um número ímpar, existe um número natural y (e, portanto, inteiro) para o qual $n = 2y + 1$. Logo podemos reescrever n como sendo $n = -2(-y) + 1$ e, neste caso, $n = f(-y)$, com $-y$ sendo um número inteiro.

Assim, qualquer que seja n um número natural, n poderá ser escrito como $n = f(z)$ para algum número inteiro z, implicando em f ser sobrejetora.

Segue que f é bijetora. Portanto, a função inversa $f^{-1}: N \rightarrow Z$ é uma bijeção, ou seja, Z é enumerável.

UNI

O fato da soma de dois números inteiros não poder resultar em ½ também pode ser explicado pela álgebra, pois já vimos que (Z; +) é um grupo, ou seja, Z é um grupo aditivo.

Assim, quando falamos em números naturais e seus subconjuntos, estamos falando de conjuntos enumeráveis, não importando se esses subconjuntos são finitos ou infinitos. Já no caso dos números reais ou mesmo números complexos ou irracionais, essa ideia não se repete. Nestes casos, temos algumas propriedades que podemos demonstrar:

TEOREMA 1.4.1 Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.

Demonstração:

Seja X um conjunto infinito, se conseguirmos definir uma função injetora $f: N \rightarrow X$, claramente f será uma bijeção entre N e a imagem de f, f(N). Como f(N) é um subconjunto de X e N é infinito, segue que f(N) será o subconjunto infinito de X enumerável que procuramos.

Vamos então definir esta função f utilizando o princípio de indução.

Seja A_1 um subconjunto qualquer de X não vazio. Definamos então $f(1) = x_1$, para algum x_1 pertencente a A_1.

Suponhamos que definimos da mesma forma f(1), f(2), ..., f(n) e consideremos o conjunto X - {f(1), f(2), ..., f(n)}. Como X é infinito, este conjunto não é vazio: na verdade, existem infinitos elementos nele! Vamos então escolher um, digamos, x_{n+1} e definamos $f(n + 1) = x_{n+1}$.

Assim, f está bem definida. Falta-nos mostrar que f é injetora! Para isso, consideremos dois números naturais m e n diferentes entre si e vamos mostrar que f(m) e f(n) também serão diferentes entre si.

Se m e n não são iguais, ou $m<n$ ou $n<m$. Vamos supor sem perda de generalidade que $m<n$. Então, pela forma como f foi construída, $f(m) \in \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$, e obviamente, $f(n) \in X - \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$, quaisquer que sejam m, n os números naturais escolhidos. Segue que f é injetora, CQD.

> O teorema que acabamos de demonstrar nos dá uma nova relação entre conjuntos infinitos e enumeráveis: ele nos garante que o conjunto enumerável é o menor dos conjuntos infinitos.

Assim como quando estudamos os conjuntos finitos, também podemos tirar certas conclusões sobre a enumerabilidade de um dado conjunto com base em outro conjunto que conhecemos e uma função que leve um em outro. Observe os dois próximos resultados:

COROLÁRIO 1.4.1 Seja Y um conjunto enumerável e $f: X \rightarrow Y$ uma função injetora. Então X também será enumerável.

Demonstração:
Exercício.

COROLÁRIO 1.4.2 Seja X um conjunto enumerável e $f: X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Então Y também será enumerável.

Demonstração:
Exercício.

Finalmente, estamos em condições de, a partir de alguns conjuntos enumeráveis, construirmos outros conjuntos enumeráveis.

LEMA 1.4.1 Consideremos $\mathbf{N}$ é o conjunto de todos os números naturais. Então o conjunto $\mathbf{N \times N}$ é enumerável.

Demonstração:

Consideremos a seguinte aplicação $f: N \times N \rightarrow N$ tal que $f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$. Note que f é injetora, pois a decomposição de um número em fatores primos é única! Assim, f é uma função injetora de **N x N** em um conjunto enumerável. Pelo Corolário 1.4.1, segue que **N x N** também é enumerável, CQD.

TEOREMA 1.4.2 Sejam X e Y dois conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano **N x Y** também é um conjunto enumerável.

Demonstração:

Sejam X e Y dois conjuntos enumeráveis. Então existem duas bijeções φ : **N** $\rightarrow$ X e Ψ : **N** $\rightarrow$ Y. Definamos então uma função f: N x N $\rightarrow$ X x Y da seguinte forma: f(m, n) = (φ (m); Ψ (n)). Note que f é uma função sobrejetora, pois as funções φ e Ψ o são. Como **N x N** é um conjunto enumerável, pelo Corolário 1.4.2, segue que **X x Y** é enumerável.

O próximo resultado natural a ser demonstrado seria que a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. Na verdade, podemos mostrar mais:

TEOREMA 1.4.3 A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração:

Sejam X_1, X_2, ..., X_n, ... uma família de conjuntos enumeráveis. Então existem bijeções f_1: N $\rightarrow$ X_1, f_2 : N $\rightarrow$ X_2 ,..., f_n : N $\rightarrow$ X_n, ... Definamos então a seguinte aplicação

$f : NxN \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} Xn$ da seguinte forma: f(m, n) = f_n(m). Claramente, f será uma função sobrejetora.

Segue então do Corolário 1.4.2 que $\bigcup_{n=1}^{\infty} Xn$ é enumerável, CQD.

EXEMPLO 5: Vamos agora mostrar que o conjunto dos números racionais Q é enumerável.

De fato, escrevendo Z* = Z - {0}, podemos definir uma função sobrejetora f: Z x Z* $\rightarrow$ Q da seguinte forma: Dados (m,n) $\in$ Z x Z*, f(m,n) = $\frac{m}{n}$. Como Z é enumerável, Z* também é enumerável e, portanto, Z x Z* é enumerável. Além disso, claramente f é sobrejetora. Segue do Corolário 1.4.2 que Q é enumerável.

Até agora nos detivemos em exemplos de conjuntos enumeráveis. Na próxima unidade, mostraremos que o conjunto dos números reais não é enumerável. Mas ele não é o único! Você também pode encontrar outros exemplos de conjuntos não enumeráveis em (LIMA, 2004; p. 8) e em (LIMA, 2010). Que tal uma visita a sua biblioteca?

LEITURA COMPLEMENTAR

O texto a seguir foi extraído do livro Cálculo de James Stewart. O objetivo original é fornecer um roteiro para a resolução de problemas, mas os mesmos passos podem ser utilizados para fazer uma demonstração matemática: daí a pertinência do texto neste Caderno de Estudos.

PRINCÍPIOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Não existem regras rígidas que garantam sucesso na resolução de problemas. Porém, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de resolver problemas e fornecer alguns princípios que poderão ser úteis ao resolver certos problemas. Estes passos e princípios são tão-somente o senso comum tornado explícito. Eles foram adaptados do livro de George Polya, *How to Solve It*.

1 Entendendo o Problema

O primeiro passo é ler o problema e assegurar-se de que o entendeu claramente. Faça a si mesmo as seguintes perguntas:

Qual é a incógnita?
Quais são as quantidades dadas?
Quais são as condições dadas?

Para muitos problemas é proveitoso fazer um diagrama e identificar nele as quantidades dadas e pedidas. Geralmente é preciso introduzir uma notação apropriada.

Ao escolher os símbolos para as incógnitas, frequentemente utilizamos letras tais como a, b, c, m, n, x e y, mas, em alguns casos, é proveitoso usar as iniciais como símbolos sugestivos; por exemplo, V para o volume ou t para o tempo.

2 Planejando

Encontre uma conexão entre a informação dada e a pedida que o ajude a encontrar a incógnita. Em geral, ajuda perguntar-se explicitamente: “Como posso relacionar o que foi dado com o que foi pedido?”. Se não for possível visualizar imediatamente a conexão, as seguintes ideias podem ser úteis para delinear um plano.

Tente Reconhecer Algo Familiar: Relacione a situação dada com seu conhecimento anterior. Olhe para a incógnita e tente se lembrar de um problema familiar que a envolva.

Tente Reconhecer os Padrões: Alguns problemas são resolvidos reconhecendo-se o tipo de padrão no qual ocorrem. O padrão pode ser geométrico, numérico ou algébrico. Você pode ver a regularidade ou a repetição em um problema ou ser capaz de conjecturar sobre o padrão de seu desenvolvimento para depois demonstrá-lo.

Use Analogias: tente pensar sobre problemas análogos, isto é, um problema similar, um problema relacionado, mas que seja mais simples que o problema original. Se você puder resolver o problema similar mais simples, isso poderá lhe dar pistas para a solução do problema mais difícil. Por exemplo, se um problema envolver números muito grandes, você poderá primeiro tentar um problema similar com números menores. […] Se seu problema for genérico, tente primeiro um caso especial.

Introduza Algo Mais: Às vezes pode ser necessário introduzir algo novo, um auxílio extra, para que você faça a conexão entre o que foi dado e o que foi pedido. […]

Divida em Casos: Algumas vezes, temos que dividir o problema em vários casos e usar para cada um deles um argumento diferente. Por exemplo, empregamos esta estratégia quando tratamos com valores absolutos.
Trabalhe Retroativamente: Às vezes, é proveitoso imaginar o problema já resolvido e trabalhar passo a passo retroativamente até chegar ao ponto que foi dado. […]

Estabeleça Submetas: Em um problema complexo é frequentemente útil estabelecer submetas (nas quais a situação desejada é apenas parcialmente satisfeita). Você pode atingir primeiro essas submetas e, depois, a partir delas, chegar à meta final.

Raciocínio Indireto: Algumas vezes, é apropriado lidar com o problema indiretamente. Para demonstrar, por contradição, que P implica Q, supomos que P seja verdadeira e Q seja falsa e tentamos ver por que isso não pode acontecer. De certa forma, temos que usar essa informação e chegar a uma contradição do que sabemos com certeza ser verdadeiro.

Indução Matemática: Para demonstrar afirmações que envolvem um número inteiro positivo n, é frequentemente útil usar o princípio de indução matemática. […]

3 Cumprindo o Plano

Na etapa 2, um plano foi delineado. Para cumpri-lo, devemos verificar cada etapa do plano e escrever os detalhes que demonstram que cada etapa está correta.

4 Revendo

Tendo completado nossa solução, é prudente revisá-la, em parte para ver se foram cometidos erros, e em parte para ver se podemos descobrir uma forma mais fácil de resolver o problema. Outra razão para a revisão é nos familiarizarmos com o método de resolução que pode ser útil na solução de futuros problemas. Descartes disse: "Todo problema que resolvi acabou se tornando uma regra que serviu posteriormente para resolver outros problemas".

FONTE: Extraído e adaptado de: Stewart (2010, p. 66-67)

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico, estudamos os conjuntos enumeráveis, ou seja, conjuntos em que é possível enumerar os seus elementos.

- Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e X.

- O conjunto dos números naturais, o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais são exemplos de conjuntos enumeráveis. Já o conjunto dos números reais é não enumerável.

- Todo subconjunto dos números naturais é enumerável.

- Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável. Neste sentido, o enumerável é o menor infinito.

- Se existir uma função injetora entre um conjunto X e um conjunto enumerável Y, então X também será enumerável.

- Se existir uma função sobrejetora entre um conjunto enumerável X e um conjunto Y, então Y também será enumerável.

- O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis também é enumerável.

- A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

AUTOATIVIDADE

Agora vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico por meio de alguns exercícios.

1 Dados os conjuntos dos números naturais N e $X = \{2n \mid n \in N\}$, mostre que a função $f : N \to X$ tal que $f(n) = 2n$ é uma bijeção.

2 Mostre que o conjunto dos números ímpares é um conjunto enumerável.

3 Seja Y um conjunto enumerável e $f : N \to X$ uma função injetora. Prove que X também será um conjunto enumerável. (Dica: lembre-se que a imagem de uma função é subconjunto do contradomínio).

4 Seja X um conjunto enumerável e $f : N \to X$ uma função sobrejetora. Prove que Y também será um conjunto enumerável.

5 Mostre que o conjunto de todos os números primos é enumerável.

UNIDADE 2

SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Nessa unidade vamos:

- reconhecer sequências numéricas e aprender a trabalhar com elas;
- saber o que significa uma sequência ser limitada;
- definir limite de sequência;
- decidir se uma sequência é convergente ou divergente através de critérios;
- aprender a trabalhar com séries numéricas;
- diferenciar séries numéricas de sequências numéricas;
- definir limite de uma série;
- decidir se uma série é convergente ou divergente através de critérios.

PLANO DE ESTUDOS

A Unidade 2 está dividida em quatro tópicos contendo exemplos e, no final de cada um, exercícios para lhe familiarizar com o assunto. Os três primeiros tópicos tratarão de sequências numéricas e suas propriedades, enquanto o último apresenta a definição e os resultados associados às séries numéricas.

TÓPICO 1 – SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

TÓPICO 2 – LIMITE DE SEQUÊNCIAS

TÓPICO 3 – CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA E LIMITES INFINITOS

TÓPICO 4 – SÉRIES NUMÉRICAS

TÓPICO 1

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

1 INTRODUÇÃO

Vamos agora construir subsídios para compreender uma importante ferramenta da análise: as sequências numéricas. Você já teve um breve contato com assunto no Ensino Médio, quando deve ter estudado as progressões aritméticas e as progressões geométricas (PA e PG). Voltaremos a estas sequências, mas estudaremos também várias outras, dando um enfoque mais generalizado. A importância deste conceito é que muitas das propriedades que vimos na unidade anterior, envolvendo teoria de conjuntos, podem ser reescritas no contexto de sequência. Quer um exemplo? Um ponto real x é aderente a um conjunto real X se existir uma sequência numérica $(x_n)_{n \in N}$ em X que converge para x. Confuso? Claro, ainda não introduzimos os conceitos de sequência numérica nem de convergência, mas note que uma definição envolvendo apenas conjuntos abertos pode ser trocada por uma, envolvendo sequências. Este exemplo deve lhe dar uma noção da importância do assunto que veremos agora. O conceito de convergência está intimamente relacionado com outro conceito, este já conhecido por você, na disciplina de Cálculo: o conceito de limite. No caso das sequências, dizer que uma sequência converge para um ponto x é o mesmo que dizer que o limite desta sequência é o ponto x. A abordagem que daremos agora a limite, entretanto, será mais formal do que a vista em Cálculo.

Pronto para o trabalho? Vamos lá!

2 DEFINIÇÃO DE SEQUÊNCIA

Sequência é um conjunto infinito de números que segue uma determinada ordem, ou seja, que não são aleatórios.

Neste sentido, o conjunto infinito {1, 2, 3, 4, ...} é uma sequência, pois cada termo é o anterior acrescido de 1. Não precisamos escrever a série inteira para saber qual o número que virá depois do 4 – nem teríamos como! Por outro lado, o conjunto {1, 2, 5, 3, 8, 5, 4, 1, 8, 9, …} não é uma sequência, pois, a partir dos números que conhecemos, não temos como descobrir qual número apareceria depois do 9, depois deste e assim por diante.

DEFINIÇÃO 2.1.1 Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada n natural um número real $x(n) = x_n$. O número n é chamado de índice da sequência, e x_n é denominado termo geral da sequência.

Observe que a definição já nos garante que uma sequência é sempre um conjunto infinito e enumerável: os valores que ela apresenta, no entanto, podem ser quaisquer números reais, desde que respeitem a função x. Vamos ver alguns exemplos para deixar esta definição mais clara:

EXEMPLO 1: O conjunto X = {1, 3, 5, 7, 9, …} é uma sequência numérica, cuja função matemática que a define é

$$\begin{aligned} x&: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ &n \to 2n - 1 \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow x(1) = x_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ n = 2 \Rightarrow x(2) = x_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ n = 3 \Rightarrow x(3) = x_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ \vdots \end{cases}$$

Assim, podemos reescrever esta sequência X como $x = (x_n)_{n \in N} = (2 \cdot n - 1)_{n \in N}$.

EXEMPLO 2: O conjunto $x = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \right\}$ também é uma sequência numérica, pois a função matemática que a define é

$$\begin{aligned} x&: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ &n \to \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow x(1) = x_1 = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2} \\ n = 2 \Rightarrow x(2) = x_2 = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} \\ n = 3 \Rightarrow x(3) = x_3 = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} \\ \vdots \end{cases}$$

Assim, podemos reescrever esta sequência X como $x = (x_n)_{n \in N} = \left(\frac{1}{2^n} \right)_{n \in N}$.

NOTAÇÃO: Denotamos uma sequência numérica por $x = (x_n)_{n \in N}$ ou ainda por $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. O termo x_n é chamado de termo geral da sequência.

UNI

Você encontrará em alguns livros a notação x = $(x_n)_{n \in N}$ para sequências, mas nunca X = {x_1, x_2, x_3, ...}. O exemplo a seguir mostrará por que.

EXEMPLO 3: Considere a seguinte sequência x = $(x_n)_{n \in N}$ = $\left((-1)^n\right)_{n \in N}$. Note que os termos desta sequência só podem assumir um dos seguintes valores: -1 ou 1. Quando n for ímpar, o termo associado será -1, quando for par, será 1. Assim, podemos escrever esta sequência como X = (-1, 1, -1, 1, -1, ...). A sequência é infinita, mas a possibilidade de termos é finita. Se denotarmos esta sequência como conjunto, teríamos {-1, 1, -1,...} = { -1, 1}, ou seja, não teríamos mais uma sequência, e sim um conjunto finito. Na verdade, este é o conjunto dos termos de uma sequência! Este fato nos motiva a escrever os elementos de uma sequência entre parênteses ao invés de utilizar chaves.

Como consequência direta deste exemplo, segue que a função que define uma sequência não é necessariamente injetora. No nosso caso, sempre que n for um número par, os termos associados serão iguais (o mesmo ocorre para todos n ímpares).

UNI

A função que define a sequência não é necessariamente injetora.

Assim, uma sequência pode assumir um número finito de valores e mesmo a função constante x(n) = c para todo n natural, onde c é um número real qualquer, descreve uma sequência numérica: (c, c, c, c...).

3 SEQUÊNCIAS ESPECIAIS

Vamos apresentar agora alguns tipos de sequência que merecem atenção especial, por fugirem um pouco dos exemplos anteriores, ou por envolverem sequências que você já conhece, mas com outros nomes.

3.1 SEQUÊNCIAS SEM TERMO GERAL EXPLÍCITO

Até agora, demos exemplos de sequências cujo termo geral podia ser explicitado por uma expressão matemática. Nem sempre isso é possível. Por exemplo, considere a sequência dada por X = (1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; …). Observe que não há como expressar x_n por uma lei matemática, embora os termos estejam respeitando uma determinada ordem. Na verdade, esta sequência é comporta pelas aproximações decimais de $\sqrt{3}$, que formam uma sequência infinita.

3.2 SEQUÊNCIAS INDEXADAS A PARTIR DE CERTO

Algumas vezes, uma dada sequência (x_n) é indexada a partir de um índice maior do que 1. Por exemplo, a sequência cujo termo geral é $x_n = \sqrt{n^2 - 8}$ só tem sentido a partir de n = 3: antes disso, o radicando seria negativo e, portanto, não existiria no âmbito dos números reais. Nestes casos, podemos "transladar" n para que a sequência adquira a cara usual.

Se ela só faz sentido a partir de n = 3, podemos definir uma nova sequência $y_n = x_{n+2}$. Neste caso, quando n = 1, teríamos $y_1 = x_{1+2} = \sqrt{(3)^2 - 8}$. Assim, trabalhar com a sequência original seria o mesmo que trabalhar com a sequência $(y_n)_{n \in N}$ cujo termo geral seria $y_n = \sqrt{(n+2)^2 - 8}$.

3.3 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Isto mesmo, as progressões aritméticas, ou simplesmente P.A., tão conhecidas no Ensino Médio, são exemplos de sequências numéricas.

Consideremos, por exemplo, a seguinte P.A: (1, 4, 7, 10, …)

Cada termo pode ser escrito como o anterior mais um número fixo, no caso, 3.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4 = 1 + 3 = x_1 + 3$$
$$x_3 = 7 = 4 + 3 = x_2 + 3 = \underbrace{(x_1 + 3)}_{x_2} + 3 = x_1 + \underbrace{2}_{3-1} \cdot 3$$
$$x_4 = 10 = 7 + 3 = x_3 + 3 = \underbrace{(x_1 + 2 \cdot 3)}_{x_3} + 3 = x_1 + \underbrace{3}_{4-1} \cdot 3$$

Então todos os termos podem ser escritos em função do primeiro. Generalizando, $x_n = x_1 + (n-1) \cdot 3$.

Chamamos 3 de razão da P.A., pois este é o número que está sendo somado termo a termo para montar a PA. Vamos denotar este valor por r. Então, o termo geral de uma PA qualquer pode ser escrito como

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot r$$

3.4 PROGRESSÃO GEOMÉTICA

Assim como as progressões aritméticas, as progressões geométricas, ou P.G., também são sequências numéricas. Observe o seguinte exemplo:

$x = (1, 4, 16, 64,\ldots)$

Cada termo pode ser escrito como o anterior multiplicado por um número fixo, no caso, 4.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4 = 1 \cdot 4 = x_1 \cdot 4$$
$$x_3 = 16 = 4 \cdot 4 = x_2 \cdot 4 = \underbrace{(x_1 \cdot 4)}_{x_2} \cdot 4 = x_1 \cdot 4^2$$
$$x_4 = 64 = 16 \cdot 4 = x_3 \cdot 4 = \underbrace{(x_1 \cdot 4^2)}_{x_3} \cdot 4 = x_1 \cdot 4^3$$

Então todos os termos podem ser escritos em função do primeiro. Generalizando, $x_n = x_1 \cdot 4^{n-1}$.

Chamamos 4 de razão da P.G., pois este é o número que está sendo multiplicado termo a termo para montar a PG. Vamos denotar este valor por q. Então, o termo geral de uma PG qualquer pode ser escrito como

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$

3.5 SEQUÊNCIA MISTA

Chamaremos neste Caderno de Estudos de sequência mista aquela em que o termo geral da sequência é definido por duas expressões matemáticas. Por exemplo, a sequência $(x_n)_{n \in N}$,

cujo termo geral é $x_n = \begin{cases} 12/n, & n = 1,2,3 \\ 3, & n \geq 4 \end{cases}$

Neste caso, a sequência é (12, 6, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3).

4 SEQUÊNCIAS LIMITADAS

DEFINIÇÃO 2.1.2 Uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, ou seja, se existem números reais a e b, com a<b para os quais $a \leq x_n \leq b$ para todo n natural.

Em outras palavras, uma sequência é limitada quando todos os seus termos pertencem a um intervalo [a, b]. Note que, dados a e b, com a < b, podemos encontrar um número inteiro c para o qual $[a,b] \subset [-c,c]$ (basta tomar c como sendo o maior valor entre |a| e |b|). Assim, dizer que $x_n \in [a,b]$ para todo n, é o mesmo que dizer que $x_n \in [-c,c]$, ou ainda, que $|x_n| \leq c$. Então podemos redefinir sequência limitada da seguinte forma:

DEFINIÇÃO 2.1.2(ii) Uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ é limitada se, e somente se, existe um número real c tal que $|x_n| \leq c$. para todo n natural.

Como consequência direta desta nova formulação, temos que:

PROPOSIÇÃO 2.1.1 Uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ *é limitada se, e somente se,* $(|x_n|)_{n \in N}$ é limitada.

EXEMPLO 1: A sequência $(x_n)_{n \in N}$ cujo termo geral é $x_n = (-1)^n$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$ para todo n.

EXEMPLO 2: A sequência $(x_n)_{n \in N}$ cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{n}$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$ para todo n.

EXEMPLO 3: A sequência $(x_n)_{n \in N}$ cujo termo geral é $x_n = sen\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$ para todo n.

EXEMPLO 4: A sequência $(x_n)_{n \in N}$ cujo termo geral é igual a -3 se n é par e 2 se n é ímpar é limitada, pois $|x_n| \leq 3$ para todo n.

Uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ que não é limitada é dita ser ilimitada. Entretanto, mesmo ilimitada, pode existir um número real a para o qual $x_n \geq a$, para todo natural n. Neste caso, dizemos que a sequência é limitada inferiormente.

Se, por outro lado, existe um número real b para o qual $x_n \leq b$, para todo n, dizemos que a sequência é limitada superiormente.

EXEMPLO 1: A sequência $(x_n)_{n \in N}$ cujo termo geral é $x_n = 2n - 1$ é limitada inferiormente por 1, mas não superiormente:

De fato, para qualquer b real que considerarmos, podemos sempre encontrar um n tal que 2n-1>b: basta tomar qualquer n tal que n < (b+1)/2.

EXEMPLO 2: A sequência $(x_n)_{n \in N}$ cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{2^n}$ é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1/2.

Veremos mais exemplos de sequências limitadas superiormente ou inferiormente, mas, antes, precisamos definir mais um tipo especial de sequências.

5 SEQUÊNCIAS MONÓTONAS

Já sabemos que, como o conjunto dos números naturais é infinito, segue que uma sequência também possui infinitos termos. À medida que n vai ficando maior, os valores desses termos podem aumentar, tornando-se cada vez menores ou mesmo, ficarem oscilando. Quando este último caso não acontece, as sequências recebem um nome especial: sequências monótonas. Assim, as sequências monótonas são tais que seus termos não oscilam.

DEFINIÇÃO 2.1.3 Seja $(x_n)_{n \in N}$ uma sequência de números reais. Dizemos que esta sequência é

(a) monótona crescente se $x_{n-1} < x_n$, para todo natural n.
(b) monótona decrescente se $x_{n-1} > x_n$ para todo natural n.
(c) monótona não crescente se $x_{n-1} \geq x_n$, para todo natural n.
(d) monótona não decrescente se $x_{n-1} \leq x_n$, para todo natural n.

Caso a sequência não seja de nenhum dos tipos acima, dizemos que a sequência não é monótona.

Observe que em uma sequência crescente, a função que a origina é injetora, isto é, se m e n forem dois números naturais tais que m ≠ n, então $x_m \neq x_n$. Este fato é que diferencia uma sequência crescente de uma não decrescente. O mesmo vale para as funções decrescente e não crescente.

Outro fato que deve ser observado é que, claramente, as sequências monótonas crescentes e não decrescentes são limitadas inferiormente. Do mesmo modo, as sequências monótonas decrescentes e não crescentes são limitadas superiormente. Vamos ver alguns exemplos.

EXEMPLO 1: Vamos analisar a sequência $\left(x_n\right)_{n\in N}$ cujo termo geral é $x_n = n^2 - n$.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 1 = 0 \\ x_2 = 4 - 2 = 2 \\ x_3 = 9 - 3 = 6 \\ \vdots \end{cases}$$

Pelos primeiros termos da sequência, temos a correta impressão que esta sequência é crescente. Entretanto, precisamos provar que ela realmente é. Então, tomando n = k um número natural qualquer, temos que

$$\begin{cases} n = k \Rightarrow x_k = k^2 - k \\ n = k+1 \Rightarrow x_{k+1} = \left(k+1\right)^2 - \left(k+1\right) \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left(k+1\right)^2 - \left(k+1\right) \\ &= k^2 + 2k + 1 - k - 1 \\ &= k^2 + k \\ &> k^2 - k \\ &= x_k \end{aligned}$$

Portanto, a sequência realmente é crescente. Além disso, esta sequência é limitada inferiormente por 0.

UNI

Caro(a) acadêmico(a)! Perceba que o que foi feito no exemplo anterior não é uma indução matemática. Apenas comparamos o termo da sequência com o seu sucessor, para decidir se ela cresce ou decresce.

EXEMPLO 2: Analisemos agora a sequência $(x_n)_{n \in N}$ cujo termo geral é $x_n = \frac{n+1}{n}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{1} = 2 \\ x_2 = \frac{3}{2} \\ x_3 = \frac{4}{3} \\ \vdots \end{cases}$$

Tomemos n = k.

$$\begin{cases} n = k \Rightarrow x_k = \frac{k+1}{k} \\ n = k+1 \Rightarrow x_{k+1} = \frac{(k+1)+1}{k+1} \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \frac{(k+1)+1}{k+1} - \frac{k+1}{k} \\ &= \frac{(k+2)\cdot k - (k+1)\cdot(k+1)}{(k+1)\cdot k} \\ &= \frac{k^2 + 2\cdot k - k^2 - 2\cdot k - 1}{(k+1)\cdot k} \\ &= \frac{-1}{(k+1)\cdot k} < 0 \end{aligned}$$

Portanto, $x_{k+1} < x_k$, uma vez que aos valores de k são maiores ou iguais a 1. Segue que a sequência é decrescente.

Mais: ela é limitada superiormente por 2. e inferiormente por 1, ou seja, ela é limitada.

EXEMPLO 3: Consideremos a sequência $(x_n)_{n \in N}$, onde $x_n = \begin{cases} 12/n, & n = 1,2,3 \\ 3, & n \geq 4 \end{cases}$

Esta sequência, obviamente, é não crescente, limitada superiormente por 12. Casualmente, é limitada inferiormente por 3.

EXEMPLO 4: A sequência $(x_n)_{n\in N}$ cujo termo geral é $x_n = sen\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ não é monótona, pois os valores assumidos pelo termo geral oscilam entre -1 e 1.

$$\begin{cases} x_1 = sen\left(1\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ x_2 = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ x_3 = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ x_3 = sen\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

6 SUBSEQUÊNCIAS

DEFINIÇÃO 2.1.4 Dada uma sequência $(x_n)_{n\in N}$, chamamos de subsequência de x à restrição da função x a um subconjunto $M = \{x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots < x_{n_i} < \ldots\}$ do conjunto de números naturais N. Denotamos esta subsequência por $(x_m)_{m\in M}$.

Pela forma como definimos sequência, não poderíamos dizer que uma subsequência é uma sequência, pois a função x′ considerada não está mais definida sobre todo o conjunto N, e sim sobre M. Por outro lado, podemos pensar em x′ como uma função que associa, a cada número natural i, o número real x_{n_i}. Por isso, podemos denotar a subsequência por $(x_n)_{n\in N}$.

EXEMPLO 1: A sequência {4, 8, 12, 16...} é, em particular, uma subsequência da sequência {2, 4, 6, 8, 10,...}.

EXEMPLO 2: A sequência {3, 3, 3, 3,...} é, em particular, uma subsequência da sequência {12, 6, 4, 3, 3, 3, 3,...}.

Vamos agora apresentar alguns resultados que podemos concluir a partir dos conceitos que já vimos:

PROPOSIÇÃO 2.1.2 Toda subsequência de uma sequência limitada é limitada.

Demonstração: (Exercício).

Se incluirmos uma hipótese a este resultado, que a sequência, além de limitada, seja monótona, então vale a volta, isto é:

PROPOSIÇÃO 2.1.3 Uma sequência monótona é limitada se, e somente se, ela possui uma subsequência limitada.

Demonstração:

Se uma sequência x = $(x_n)_{n \in N}$ monótona é limitada, então existe um número real c tal que $|x_n| \leq c$. Como qualquer subsequência da sequência x é composta por elementos de x, segue que a propriedade se mantém pros elementos de qualquer subsequência de x. Portanto, todas as subsequências são limitadas.

Vamos agora provar a volta do resultado: este só vale se a sequência for monótona (observe que ainda não havíamos utilizado esta parte da hipótese).

Suponhamos agora que x = $(x_n)_{n \in N}$ seja uma sequência monótona que possui uma subsequência $(x_{n_i})_{i \in M}$ limitada. Vamos supor ainda, sem perda de generalidade que a sequência seja monótona não crescente. Então, $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \ldots \leq x_{n_1} \leq \ldots \leq b$ para algum b real. Logo, para todo n natural, é possível encontrar $n_k > n$ e, neste caso, $x_n \leq x_{n_k} \leq b$. Ou seja, para todo natural n, $x_n \leq b$. Portanto, a sequência x também é limitada, CQD.

UNI

A proposição anterior nos dá um critério para saber se uma sequência é ilimitada também: basta negar a tese e a hipótese.

COROLÁRIO 2.1.2 Uma sequência monótona é ilimitada se, e somente se, toda subsequência for ilimitada.

7 ALGUMAS SEQUÊNCIAS IMPORTANTES

Já vimos alguns exemplos de sequências nas páginas anteriores. Vamos agora exibir como exemplos mais algumas sequências importantes em Análise, e analisá-las quanto a sua convergência ou não. Você irá reconhecer algumas delas, mas a importância de outras ficará evidente à medida que avançarmos nos nossos estudos.

EXEMPLO 1: Consideremos a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

Como, a cada termo, somamos um número positivo, claramente esta sequência é monótona crescente. Além disso, ela é limitada, pois

$$\begin{aligned}
2 \leq x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 1} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{n vezes}} \cdot 1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\
&< 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

Voltaremos a esta sequência mais à frente.

EXEMPLO 2: Consideremos agora a sequência $(b_n)_{n \in N}$, cujo termo geral é $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Podemos reescrevê-lo via fórmula do binômio de Newton da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} + \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{\cancel{n} \cdot n} + \frac{\cancel{n}}{3!} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{\cancel{n} \cdot n^2} + \ldots + \frac{\cancel{n}}{n!} \cdot \frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{n} \cdot n^{n-1}} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\
&\qquad + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Observe que os termos b_n são positivos, pois cada b_n é escrito como uma soma de parcelas positivas. Além disso, $b_n < b_{n+1}$ para todo n, pois cada termo tem uma parcela positiva a mais do que o termo anterior. Com isso, concluímos que a sequência é crescente. Agora, observe que,

$$\begin{cases}
\frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!} \\
\frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!} \\
\ldots \\
\frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{n!}
\end{cases}$$

Logo, para cada n, $b_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ e, pelo exemplo anterior, $b_n < 3$ para todo n natural. Segue que esta sequência é limitada.

EXEMPLO 3: Consideremos a sequência $(x_n)_{n \in N}$, cujo termo geral é dado por $x_n = \sqrt[n]{n}$. Vamos analisar esta sequência.

A primeira informação que podemos tirar é que esta sequência é formada por termos positivos, pois n é um número natural. Assim, ela é limitada inferiormente por 1. Vamos ver agora se ela é ou não monótona. Para isso, vamos comparar x_n e x_{n+1}

$$\begin{cases} x_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow (x_n)^{n\cdot(n+1)} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n\cdot(n+1)} = n^{n+1} \\ x_{n+1} = \sqrt[n+1]{n+1} \Rightarrow (x_{n+1})^{n\cdot(n+1)} = \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{n\cdot(n+1)} = (n+1)^n \end{cases}$$

Por outro lado, sabemos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, qualquer que seja n. Então, qualquer que seja n maior do que 3, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$., Assim,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n} < n$$

$$(n+1)^n < n \cdot n^n$$

$$(n+1)^n < n^{n+1}$$

$$(x_{n+1})^{n\cdot(n+1)} < (x_n)^{n\cdot(n+1)}$$

$$x_{n+1} < x_n$$

Para todo n maior ou igual a 3, ou seja, a sequência é decrescente para n maior que 3. Vamos analisar os casos em que n é menor ou igual a 3.

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ n = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt[2]{2} \\ n = 3 \Rightarrow x_3 = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

$$1 < \sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3}$$

Portanto, a sequência é crescente até n = 3 e depois passa a ser decrescente. Assim, apesar de não ser monótona, é limitada.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico, vimos:

- A definição de sequência numérica.

- Que uma sequência numérica pode ou não ser limitada superiormente, inferiormente ou ser limitada.

- Que uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ *é limitada se, e somente se,* $(|x_n|)_{n \in N}$ é limitada.

- Quando uma sequência é monótona e os tipos de monotonicidade que ela pode apresentar.

- O conceito de subsequência.

- Que toda subsequência de uma sequência limitada é limitada.

- Um critério para saber quando uma sequência monótona é limitada ou não a partir de suas subsequências.

AUTOATIVIDADE

Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico, resolvendo alguns exercícios.

1 Mostre que toda subsequência de uma sequência limitada é limitada.

2 Decida se as sequências a seguir são limitadas ou não, e justifique sua resposta.

a) $x = \left((-3)^n\right)_{n \in N}$

b) $x = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2^n - 1}, \ldots\right)$

c) $x = \left(\frac{8^n}{n!}\right)_{n \in N}$

d) $x = \left(7 - \frac{2}{n^4}\right)_{n \in N}$

LIMITE DE SEQUÊNCIAS

1 INTRODUÇÃO

Pronto, agora você já está familiarizado com o conceito de sequências numéricas, já viu alguns exemplos de sequências e já aprendeu que algumas delas têm características bem interessantes. Vamos agora introduzir o conceito de limite de uma sequência. A ideia é parecida com a que você aprendeu quando estudou limites em cálculo: agora, um número real a é o limite de uma sequência x = $\left(x_n\right)_{n\in N}$ quando, para valores grandes de n, a sequência se torne tão próxima de quanto se queria. A sequência não precisa assumir o valor de a para nenhum n, mas deve estar cada vez mais próxima de a. Vamos enunciar esta definição formalmente e estudar suas particularidades.

2 DEFINIÇÃO DE LIMITE

Consideremos novamente a sequência $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\in N}$. Vimos que, para n muito grandes, esta sequência assume valores tão próximos de 1 quanto se queira. Em outras palavras, podemos dizer que o termo geral tende a 1 quando n tende ao infinito. Este exemplo nos motiva a definir limite de uma sequência.

DEFINIÇÃO 2.2.1**:** Dizemos que um número real a é limite da sequência x = $\left(x_n\right)_{n\in N}$ quando, para todo número real $\epsilon > 0$ (épsilon maior do que zero), existe um número n_0 tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Neste caso, escrevemos lim $x_n = a$, ou ainda, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Embora não seja usual, vamos transcrever alguns parágrafos do livro (LIMA, 1976), por acreditarmos que eles explicam muito bem a noção de limite:

> O matemático inglês G. H. Hardy, um aficionado das competições esportivas, costumava dizer que, para bem entender a ideia de limite, deve-se pensar em dois competidores. Um deles, digamos, o mocinho, quer provar que lim $x_n = a$ enquanto o outro, digamos, o bandido, procura impedi-lo. O bandido fornece os épsilons (ε) enquanto o mocinho trata de conseguir, para cada $\varepsilon > 0$ proposto como desafio, o n_0 correspondente (isto é, n_0 tal que $n > n_0$ implique em $|x_n - a| < \varepsilon$).
> O mocinho ganhará o jogo (e ficará, portanto, estabelecido que lim $x_n = a$) se, para qualquer $\varepsilon > 0$ exibido pelo adversário, ele for capaz de obter um n_0 conveniente. (isto é, tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$). Por outro lado, para que o bandido ganhe a parada, basta que ele consiga um número real $\varepsilon > 0$ para o qual nenhum n_0 que o mocinho venha a tentar, sirva. (Ou seja, esse ε deve ser tal que para todo n_0 exista $n > n_0$ com $|x_n - a| > \varepsilon$.)

Assim, dizer que a partir de um n_0, $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ é o mesmo que dizer que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo $n > n_0$, ou ainda, que a sequência pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ a menos de uma quantidade finita de n's – no caso, apenas para $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$.

Outro fato que merece ser destacado é que, a partir do $\varepsilon > 0$ proposto, encontra-se n_0, isto é, a escolha de n_0 depende única e exclusivamente de $\varepsilon > 0$.

EXEMPLO 1: A sequência $(x_n)_{n\in N}$ cujo termo geral é $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ possui limite igual a 1. Vamos entender inicialmente a ideia do que faremos, considerando um valor específico para ε. Suponhamos, por exemplo, $\varepsilon = 0{,}1$.

Temos então que encontrar n_0 tal que $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}1$, para todo $n > n_0$.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-1}{n+1}\right| < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad 1 < 0{,}1\cdot(n+1) \quad \Rightarrow \quad 10 < (n+1) \quad \Rightarrow \quad 9 < \text{n}$$

Então, para $\varepsilon = 0{,}1$, basta tomar $n_0 = 9$, pois a partir do nono termo, todos os termos da sequência serão tais que $|x_n - 1| < 0{,}1$.

Vamos agora generalizar. Consideremos $\varepsilon > 0$.

Queremos encontrar n_0 tal que $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$, ou seja, tal que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Agora, $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 < n$.

Pronto, estamos em condições de realizar a demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Então, para todo $n > n_0$, temos $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Portanto, $\lim x_n = 1$, CQD.

UNI

Passos para mostrar que um dado número é limite de uma sequência:
(I) encontrar o candidato para este limite;
(II) substituir no módulo o valor do termo geral e do candidato a limite;
(III) manipular os valores até encontrar um número que só dependa de n;
(IV) impor que este número deve ser menor do que ε > 0;
(V) Isolar n.

EXEMPLO 2: Consideremos a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = \dfrac{3n}{n + sen(2n)}$.

Note que esta sequência é limitada por 3. Na verdade, na medida em que n cresce, esta sequência se aproxima tanto de 3 quanto se queira. Encontramos assim um candidato para o limite. Vamos agora formalizar esta afirmação.

Seja ε > 0. Queremos encontrar n_0 para o qual $|x_n - 3| = \left|\dfrac{3n}{n + sen(2n)} - 3\right| < \varepsilon$ para todo n > n_0.

Vamos analisar o módulo com mais calma:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3n}{n+sen(2n)} - 3\right| &= \left|\frac{3n}{n+sen(2n)} - \frac{3n+3sen(2n)}{n+sen(2n)}\right| \\
&= \left|\frac{3n-3n-3sen(2n)}{n+sen(2n)}\right| \\
&= \left|\frac{-3sen(2n)}{n+sen(2n)}\right| \\
&= 3\cdot\left|\frac{sen(2n)}{n+sen(2n)}\right| \\
&\le 3\cdot\left|\frac{1}{n+sen(2n)}\right| \\
&\le \frac{3}{|n+sen(2n)|}
\end{aligned}$$

Agora, -1 ≤ sen(2n) ≤ 1, implicando em n -1 ≤ n + sen(2n). Assim,

$$\left|\frac{3n}{n+sen(2n)} - 3\right| \le \frac{3}{|n+sen(2n)|} \le \frac{3}{n-1}.$$

Vamos agora impor que $\frac{3}{n-1} < \varepsilon$. Neste caso, $\frac{3}{\varepsilon} + 1 < n$. Pronto, encontramos nosso n_0.

Assim, dado ε > 0, existe n_0 (basta pegar $\frac{3}{\varepsilon} + 1 < n_0$) para o qual $\left| \frac{3n}{n + sen(2n)} - 3 \right| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$.

Portanto, lim $x_n = 3$, CQD.

Nem todas as sequências possuem um limite. Por exemplo, a sequência $(2n)_{n \in N}$ tende ao infinito à medida que n cresce. Entretanto, quando o limite existe, ele obrigatoriamente é único.

PROPOSICÃO 3.2.1 (Unicidade do limite). Dada uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ tal que lim $x_n = a$ e lim $x_n = b$ para dois números reais a e b, então necessariamente a = b.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que a e b não são iguais. Então, os intervalos abertos $\left(a - \frac{|b-a|}{2}; a + \frac{|b-a|}{2} \right)$ e $\left(b - \frac{|b-a|}{2}; b + \frac{|b-a|}{2} \right)$ são disjuntos.

De fato, note que

$$\begin{cases} x \in \left(a - \frac{|b-a|}{2}; a + \frac{|b-a|}{2} \right) \Rightarrow |x-a| < \frac{|b-a|}{2} \\ y \in \left(b - \frac{|b-a|}{2}; b + \frac{|b-a|}{2} \right) \Rightarrow |y-b| < \frac{|b-a|}{2} \end{cases}$$

Visto que $|b - a|$ é a distância entre a e b, não existe elemento que pertença a estes dois conjuntos.

Como, por hipótese, lim $x_n = a$, para todo ε, existe n_0 para o qual $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Em particular, se $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$, existe n_a para o qual $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > n_a$.

Assim, $x_n \in \left(a - \frac{|b-a|}{2}; a + \frac{|b-a|}{2} \right)$ para todo $n > n_a$.

Por outro lado, lim $x_n = b$. Então, pelo mesmo argumento, existe n_b para o qual $x_n \in \left(b - \frac{|b-a|}{2}; b + \frac{|b-a|}{2} \right)$ para todo $n>n_b$

Então se tomarmos $n_0 = \max(n_a, n_b)$, teremos que $x_n \in \left(a - \frac{|b-a|}{2}; a + \frac{|b-a|}{2}\right) \cap \left(b - \frac{|b-a|}{2}; b + \frac{|b-a|}{2}\right)$ para todos $n > n_0$, o que é uma contradição!

Portanto, o limite, se existir, é único, CQD.

As sequências que possuem um limite real são chamadas de convergentes, enquanto as que não possuem são chamadas de divergentes. Vamos definir formalmente estes dois novos conceitos para que possamos utilizá-los.

3 CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIA

DEFINIÇÃO 2.2.2: Uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ é dita convergente quando $\lim x_n = a$ para algum número real a, ou seja, quando existe o limite da sequência. Dizemos então que a sequência converge para a. Caso não exista tal limite, dizemos que a sequência é divergente.

Atenção: Não confunda os conceitos de sequência limitada com limite de sequências. Por exemplo, a sequência {3, -1, 3, -1, 3, -1...} é limitada mas não é convergente.

EXEMPLO: A sequência x cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{1}{n}$ é convergente e converge para 0. De fato, consideremos $\varepsilon > 0$. Então, tomando $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, teremos $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Decidir se uma sequência é convergente ou não pode não ser uma tarefa simples. Para facilitar este processo, podemos concluir alguns critérios que nos ajudarão nesta tarefa. Vamos agora mostrar algumas dessas propriedades.

TEOREMA 2.2.1: Se uma sequência converge para um valor a, qualquer subsequência converge para o mesmo valor a.

Demonstração:

Seja $x = (x_n)_{n \in N}$ uma sequência que converge para um valor a e consideremos $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_i}, ...)$ uma subsequência de x. Como a sequência x converge para a, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 para o qual $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Por outro lado, como os índices da subsequência formam um conjunto infinito, $n_{j0} > n_0$. Assim, para todo $n_i > n_{j0}$, $\left|x_{n_i} - a\right| < \varepsilon$. Portanto, a sequência também converge para a. Como a subsequência foi escolhida aleatoriamente, o resultado vale para uma subsequência de x qualquer, CQD.

O que o teorema anterior nos garante é que, mesmo que desconsideremos uma quantidade infinita de termos de uma sequência convergente, a convergência para a se mantém.

TEOREMA 2.2.2**:** Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração:

Seja $x = (x_n)_{n \in N}$ uma sequência que converge para um valor a. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um número n_0 tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Fixemos $\varepsilon = 1$, ou seja, a partir deste valor, $1 - a < x_n < 1 + a$, isto é, $x_n \in (a - 1, a + 1)$. Consideremos então b como sendo $b = \max\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\right)$. Então $x_n \in (-b, b)$, ou seja, $|x_n| < b$, qualquer que seja n natural. Portanto nossa sequência é limitada, CQD.

Como consequência imediata deste teorema, se uma sequência é ilimitada ela é divergente.

O Teorema anterior nos garantiu que toda sequência convergente é limitada, entretanto, a recíproca não é verdadeira. De fato, se considerarmos a sequência cujo termo geral é $x_n = (-1)^n$, teremos uma sequência limitada, mas que não converge. Isso acontece em função dos termos desta sequência oscilarem entre os valores -1 e 1. Assim, se o limite existisse, ele não seria único, o que seria um absurdo! Podemos pensar então que, talvez, se a sequência fosse mais bem comportada, poderíamos garantir a convergência. Isto é o que nos prova o teorema a seguir:

TEOREMA 2.2.3: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração:

Se a sequência é limitada, segue que ela possui tanto o limite inferior como o superior. Agora ela é monótona. Logo converge ou para o limite inferior (caso das sequências monótonas decrescentes ou não crescentes) ou para o limite superior (caso das sequências monótonas crescentes ou não decrescentes).

EXEMPLO: A sequência {12, 6, 4, 3, 3, 3, 3, 3, ...} é monótona não crescente, limitada superiormente por 12 e inferiormente por 3. Segue que esta sequência é convergente, convergindo para o número 3.

Entretanto, mesmo a partir das sequências não tão bem comportadas, podemos concluir algo a respeito da convergência:

TEOREMA 2.2.4 (Teorema de Bolzano-Weierstrass): Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Demonstração:

Não incluiremos a demonstração deste resultado aqui, por ele utilizar conceitos que ainda não introduzimos. Entretanto, você pode encontrá-la em LIMA, 2010.

UNI

Note que esta demonstração poderia ter sido montada da mesma forma, considerando X como sendo o conjunto de todos os números x tais que $x > x_n$ para uma infinidade de índices n. Neste caso, tomaríamos o ínfimo do conjunto e procederíamos de maneira análoga.

EXEMPLO 1: A sequência {-1, 1, -1, 1, -1,...} é limitada (inferiormente por -1 e superiormente por 1). Podemos então escolher uma subsequência convergente, tomando, por exemplo, apenas os valores positivos {1,1,1,...}: esta subsequência converge para 1. Para esta sequência, podemos encontrar outra subsequência convergente: {-1, -1, -1,...} converge para -1.

TEOREMA 2.2.5 Se $(x_n)_{n\in N}$ é uma sequência convergente, então a sequência $(|x_n|)_{n\in N}$ também é convergente.

Demonstração: exercício.

Note que a recíproca não é verdadeira: De fato, a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = (-1)^n$ não é convergente, entretanto a sequência $(|x_n|)_{n\in N}$ é!

RESUMO DO TÓPICO 2

Vamos, a seguir, relembrar brevemente o que vimos neste tópico.

- Definimos limite de uma sequência numérica.

- Mostramos que este limite é único.

- Introduzimos o conceito de convergência de sequências.

- Vimos que se uma sequência converge, todas as suas subsequências convergem para o mesmo valor.

- Mostramos que toda sequência convergente é limitada, mas que nem toda sequência limitada é convergente: apenas as monótonas.

- Vimos que toda sequência limitada tem uma subsequência convergente.

AUTOATIVIDADE

Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico através de alguns exercícios.

1 Encontre o limite da sequência $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in N}$.

2 Encontre o limite da sequência $\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)_{n\in N}$.

3 Analise as sequências a seguir e indique se elas são ou não convergentes:

a) $(2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$.

b) $\left((-2)^n\right)_{n\in N}$.

c) $(1/n)_{n\in N}$.

d) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in N}$.

e) $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in N}$.

4 Decida se as sequências a seguir são convergentes. Caso sejam, prove:

a) $\left(\dfrac{2n-3}{n}\right)_{n\in N}$

b) $\left(\dfrac{n^2+3}{n^2}\right)_{n\in N}$

c) $\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n\right)_{n\in N}$

d) $\left(\dfrac{1}{\pi}\cos(n\pi)\right)_{n\in N}$

e) $\left(51-\dfrac{2^n}{n!}\right)_{n\in N}$

CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA E LIMITES INFINITOS

1 INTRODUÇÃO

Neste tópico daremos continuidade ao estudo das sequências numéricas, que iniciamos no tópico anterior. Nosso objetivo será encontrar critérios para decidir sobre a convergência ou não se uma sequência sem utilizar a definição de convergência, que pode ser bem complicada de ser aplicada. A ideia será comparar a sequência com outras cuja convergência ou não seja conhecida. Neste sentido, veremos algumas propriedades aritméticas envolvendo limites, conheceremos mais algumas sequências particulares e aprenderemos mais alguns critérios de convergência de sequências que facilitarão nosso trabalho futuro. Finalmente, conheceremos um tipo especial de sequências: as sequências de Cauchy.

2 MAIS ALGUMAS PROPRIEDADES SOBRE LIMITES

Começaremos este tópico apresentando um critério bastante útil para decidirmos sobre a convergência ou não de uma sequência a partir de outras duas.

TEOREMA 2.3.1 (Regra do Confronto): Consideremos três sequências $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$ e $(z_n)_{n\in N}$ tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n natural. Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = a$, então $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$.

Demonstração: (exercício)

Claro que não é tão simples utilizar este critério, pois as suas hipóteses não são tão triviais. Entretanto, a Regra do Confronto torna-se particularmente útil quando trabalhamos com sequências envolvendo expressões trigonométricas, como cosseno e seno, principalmente. Observe o exemplo a seguir:

EXEMPLO: Consideremos a sequência $(y_n)_{n\in N}$ cujo termo geral é dado por $y_n = \frac{\cos(n)}{n}$.

Como a função cosseno é limitada pelos valores -1 e 1, se que $\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$, para todo natural n. Agora, sabemos que as sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(z_n)_{n\in N}$ cujos termos gerais são dados por $x_n = -\frac{1}{n}$ e $z_n = \frac{1}{n}$ são ambas convergentes e convergem para o mesmo limite: 0. Então, pela propriedade acima, segue que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

Suponhamos agora que temos uma sequência cujo termo geral que pode ser separado em duas parcelas de uma adição, ou como o produto de termos gerais de duas ou mais sequências. Esta separação pode ser útil para concluirmos se nossa sequência converge a partir das propriedades algébricas de limite.

TEOREMA 2.3.2 Consideremos duas sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ tais que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} y_n = b$. Então:

(a) $\lim_{n\to+\infty}[\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n] = \alpha \cdot \mathrm{a} + \beta \cdot \mathrm{b}$, quaisquer que sejam α, β reais não nulos.

(b) $\lim_{n\to+\infty}[x_n \cdot y_n] = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$

(c) $\lim_{n\to+\infty}[\frac{x_n}{y_n}] = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, desde que b≠ 0.

Demonstração:

(a) Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} y_n = b$, existe um número natural n_0 tal que $|x_n - \mathrm{a}| < \varepsilon$ e $|y_n - \mathrm{b}| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Agora, pelas propriedades de valor absoluto demonstradas na unidade anterior,

$$
\begin{aligned}
|(\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) - (\alpha \cdot \mathrm{a} + \beta \cdot \mathrm{b})| &= |(\alpha \cdot x_n - \alpha \cdot \mathrm{a}) + (\beta \cdot y_n - \beta \cdot \mathrm{b})| \\
&\leq |(\alpha \cdot x_n - \alpha \cdot \mathrm{a}) + (\beta \cdot y_n - \beta \cdot \mathrm{b})| \\
&\leq |\alpha| \cdot |x_n - \mathrm{a}| + |\beta| \cdot |y_n - \mathrm{b}| \\
&\leq |\alpha| \cdot |x_n - \mathrm{a}| + |\beta| \cdot |y_n - \mathrm{b}| \\
&< |\alpha| \cdot \varepsilon + |\beta| \cdot \varepsilon
\end{aligned}
$$

Assim, basta tomar n_1 tal que $|x_n - \mathrm{a}| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ e $|y_n - \mathrm{b}| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ para todo $n > n_1$. Neste caso,

$$
\begin{aligned}
|(\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) - (\alpha \cdot \mathrm{a} + \beta \cdot \mathrm{b})| &\leq |\alpha| \cdot |x_n - \mathrm{a}| + |\beta| \cdot |y_n - \mathrm{b}| \\
&< |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

para todo $n > n_1$

(b) Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, existe um número natural n_0 tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ e $|y_n - b| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Agora, pelas propriedades de valor absoluto demonstradas na unidade anterior,

$$\begin{aligned}\left|(x_n \cdot y_n) - (a \cdot b)\right| &= \left|x_n \cdot y_n + (x_n \cdot b - x_n \cdot b) - a \cdot b\right| \\ &= \left|(x_n \cdot y_n - x_n \cdot b) + (x_n \cdot b - a \cdot b)\right| \\ &\leq \left|(x_n \cdot y_n - x_n \cdot b)\right| + \left|(x_n \cdot b - a \cdot b)\right| \\ &= \left|x_n \cdot (y_n - b)\right| + \left|b \cdot (x_n - a)\right|\end{aligned}$$

Agora, como a sequência (x_n) é convergente, segue que ela é limitada, ou seja, existe um número real positivo c tal que $|x_n| \leq c$ para todo natural n. Logo

$$\begin{aligned}\left|(x_n \cdot y_n) - (a \cdot b)\right| &\leq \left|x_n \cdot (y_n - b)\right| + \left|b \cdot (x_n - a)\right| \\ &= |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \\ &\leq c \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \\ &\leq c \cdot \varepsilon + |b| \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

Assim, basta tomar x_n tal que $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ e $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2c}$ para todo $n > n_1$. Neste caso,

$$\left|(x_n \cdot y_n) - (a \cdot b)\right| \leq c \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \leq c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

para todo $n > n_1$.

(c) Observe que podemos considerar a sequência $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ com sendo um produto de sequências $\left(x_n \cdot \dfrac{1}{y_n}\right)$. Assim, se provarmos que o fato de $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ implicar em $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$, pela propriedade (b), teremos demonstrado (c).

Dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 $|y_n - b| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Agora observe que $\left|\dfrac{1}{y_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \left|\dfrac{b - y_n}{y_n \cdot b}\right| = \dfrac{|y_n - b|}{|y_n \cdot b|} = \dfrac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|}$.

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ segue que $|y_n|$ converge para $|b|$. Assim, a partir de um certo n_1, $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$ (lembre-se que $|y_n|$ vai adquirindo valores cada vez mais próximos de $|b|$). Assim,

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|y_n-b|}{|y_n|\cdot|b|}<\frac{\varepsilon}{|y_n|\cdot|b|}<\frac{2}{|b|}\cdot\frac{\varepsilon}{|b|}=\frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

Esta desigualdade surgiu das hipóteses que $|y_n-b|<\varepsilon$ e $|y_n|>\frac{|b|}{2}$ a partir de certo n_1.

Consideremos então n_2 tal que $|y_n|>\frac{|b|}{2}$ e $|y_n-b|<\frac{|b|^2\,\varepsilon}{2}$ (estamos escolhendo n_2 justamente para que esta segunda desigualdade seja válida, pois queremos uma desigualdade apenas em termos de épsilon, e não de b.).

Então $\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|<\frac{2}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2\,\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$, para todo $n > n_2$, CQD.

A demonstração do teorema anterior é importante por utilizar vários artifícios de cálculo. Em Análise Matemática, esta capacidade de armazenar "truques" na manga e tirar o mais apropriado quando nos deparamos com um exercício faz toda a diferença. Portanto, aprenda a cultivá-los!

EXEMPLO 1: A sequência $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in N}$ é convergente e converge para 0, pois

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)=0$$

EXEMPLO 2: A sequência $\left(2+\frac{3}{n^2}\right)_{n\in N}$ é convergente e converge para 2, pois

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}2+3\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=2+0=2$$

Note que o teorema anterior pode ser estendido para qualquer quantidade finita de sequências, isto é, a soma dos limites de uma quantidade finita de sequências é igual ao limite da soma dessas sequências, por exemplo. Mas atenção para a palavra FINITA! E mesmo para uma quantidade finita, mas muito grande, ou sobre a qual não temos muito controle, não podemos aplicar o teorema.

De fato, considere a sequência $(s_n)_{n\in N}$ cujo termo geral é $s_n=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n\text{ parcelas}}$.

Obviamente, s_n = 1 para todo n e, portanto, a sequência converge para 1. Mas suponhamos que não soubéssemos disso e resolvêssemos aplicar a propriedade aritmética da soma de limites. Então teríamos

$$\lim_{n\to+\infty} = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} + \ldots + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}_{n \text{ parcelas}} = \underbrace{0+0+\ldots+0}_{n \text{ parcelas}} = 0$$

,Ou seja, estaríamos concluindo que 1 = 0.

EXEMPLO 2: Vamos mostrar que a sequência $(x_n)_{n\in N}$ tal que $x_n = \sqrt[n]{n}$ é convergente, e converge para 1. O primeiro passo para isso é observar que esta sequência é monotonamente decrescente a partir de n = 3. Como n é positivo, os termos gerais sempre serão positivos, implicando nesta sequência ser limitada e, portanto, convergente. Seja L o limite desta sequência. Então necessariamente, $L = \inf\{n^{1/n} : n \in N\}$ e, portanto, além de L ser maior do que zero, podemos concluir que $L \geq 1$.

Consideremos agora a subsequência $(x_{2n})_{n\in N}$, onde $x_{2n} = \sqrt[2n]{2n}$. Claramente, esta subsequência deve convergir também para L. Agora,

$$L^2 = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(2n\right)^{1/2n}\right]^2 = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(2n\right)^{1/n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[2^{1/n}\cdot n^{1/n}\right] = \lim_{n\to+\infty}2^{1/n}\cdot\lim_{n\to+\infty}n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}2^{1/n}\cdot L.$$

Agora $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2} = 1$. Observe o quadro a seguir:

n	$\sqrt[n]{2}$
100	1,00695555
100.000	1,000006931
10.000.000	1,000000069
1.000.000.000	1,0000000001
100.000.000.000	1,0000000000
$n \to \infty$	$\sqrt[n]{2} \to 1$

Logo $L^2 = \lim\limits_{n\to+\infty}2^{1/n}\cdot L = L$.

Como o quadrado de L é igual a L, obrigatoriamente, L = 1.

O TEOREMA 2.3.2 nos deu um critério para decidir sobre a convergência de uma sequência quando o termo geral pode ser visto como o produto dos termos de outras duas sequências, ambas convergentes. O teorema a seguir nos dará um critério para uma situação parecida, onde uma das séries converge a zero e a outra não é necessariamente convergente, apenas limitada.

TEOREMA 2.3.3 Consideremos duas sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in N}$ é limitada. Então $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[x_n \cdot y_n\right] = 0$.

Demonstração: Exercício.

Este critério é particularmente útil no estudo de convergência cujos termos alteram de sinal (sequências alternadas).

EXEMPLO: A sequência $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)_{n\in N}$ converge pra zero. De fato, sabemos que a sequência $\left((-1)^n\right)_{n\in N}$ é limitada, embora não seja convergente, e $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$ converge para zero.

Os teoremas que vimos até agora nos forneceram critérios para decidir se uma sequência converge ou não a partir da comparação com outras sequências. Entretanto, muitas vezes, não conseguimos fazer esta comparação por desconhecermos sequências que sirvam de parâmetro. Seria interessante termos critérios também para utilizar apenas na sequência que estamos trabalhando, analisando, de alguma forma, seu termo geral. O próximo resultado vem neste sentido.

TEOREMA 2.3.4: Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência tal que $x_n > 0$ para todo número natural n. Se $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = L < 1$, então a sequência converge para zero.

EXEMPLO 1: A sequência $(x_n)_{n\in N}$ com $x_n = \frac{k^n}{n!}$ converge para 0, pois

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{k}{n+1}\right] = 0 < 1$$

EXEMPLO 2: A sequência $(x_n)_{n\in N}$ com $x_n = \frac{n^k}{k^n}$ converge para 0, pois

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{k}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right] = \frac{1}{k} < 1$$

Vamos agora estudar um tipo especial de sequências, conhecido como sequências de Cauchy.

3 LIMITES INFINITOS

Vimos que quando uma sequência $(x_n)_{n\in N}$ é convergente, existe um número real x tal que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Por outro lado, existem sequências que simplesmente não convergem!

Estas sequências são ditas divergentes, e também podem ser expressar por meio de limites. Vamos entender agora como fazemos isso e quais as conclusões que podemos tirar quando trabalhamos com sequências deste tipo.

DEFINIÇÃO 2.3.1 Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in N}$ diverge (ou tende) para mais infinito quando, para qualquer valor positivo k, é possível encontrar n_k para o qual $x_n < k$ para todo $n > n_k$. Neste caso, escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, ou ainda, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Analogamente, dizemos que $(x_n)_{n\in N}$ diverge (ou tende) para menos infinito quando, para qualquer valor negativo k, é possível encontrar n_k para o qual $x_n < k$ para todo $n > n_k$. Neste caso, escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

EXEMPLO 1: A sequência $(x_n)_{n\in N}$ tal que $x_n = n$ tende para mais infinito, do mesmo modo que a sequência $(y_n)_{n\in N}$ onde $y_n = \frac{n^2}{2}$, para todo n natural. Já as sequências $(a_n)_{n\in N}$ e $(b_n)_{n\in N}$ tais que $a_n = -n$ e $b_n = 4 - \sqrt{n}$ tendem a menos infinito.

Note que + ∞ e - ∞ não são números reais, apenas uma notação que indica o comportamento das sequências para valores muito grandes de n.

PROPOSIÇÃO 2.3.1 Dada uma sequência real $(x_n)_{n\in N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} (-x_n) = -\infty$.

Demonstração: exercício.

PROPOSIÇÃO 2.3.2 Dadas duas sequências reais $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ não nulas tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ e $(y_n)_{n\in N}$ é limitada inferiormente. Então

(i) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \infty$

Demonstração:

(i) Seja k >0.

Como $(y_n)_{n\in N}$ é limitada inferiormente, ou seja, existe c para o qual $c \le y_n$ qualquer se seja $n \in N$.

Por outro lado, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, e, portanto, é possível encontrar n_k para o qual $x_n > k - c$ para todo $n > n_k$. Então, qualquer que seja $n > n_k$, $x_n + y_n > (k - c) + c = k$. Como k foi escolhido arbitrariamente, segue que $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$, como queríamos demonstrar.

(ii) A demonstração é parecida com a anterior e fica como exercício.

Note que foi preciso arrumar um pouco a demonstração, para que a desigualdade final ficasse apenas dependendo de k. Esses arranjos são comuns em Análise, mas são dispensáveis. Suas únicas funções são deixar a demonstração mais bonita e salientar a conclusão.

As hipóteses da proposição anterior permanecem válidas se considerarmos duas sequências, ambas tendendo ao infinito, desde que uma delas seja limitada inferiormente. A mesma proposição pode ser adaptada para sequências que tendem a menos infinito. Neste caso, basta que uma delas seja limitada superiormente que, tanto a sequência formada pela soma de ambas, como a formada pela multiplicação de ambas tenderão a menos infinito também. Mas e se uma das sequências tender ao infinito e a outra ao menos infinito, qual conclusão poderemos tirar a respeito da sua soma, por exemplo?

Nenhuma! Vamos entender melhor o que acontece através de alguns exemplos.

EXEMPLO 1: Considere as sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ tais que $x_n = \sqrt{n}$ e $y_n = -\sqrt{n+1}$. Claramente, enquanto a primeira sequência tende a mais infinito, a segunda tende a menos infinito. Entretanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\frac{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n + \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} - (n+1)}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)} = 0
\end{aligned}$$

Assim, neste exemplo, mesmo os termos das sequências não sendo em valores absolutos iguais, o limite da sua soma tende a 0. Agora, observe o exemplo seguinte:

EXEMPLO 2: Considere agora as sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ tais que $x_n = n^3$ e $y_n = -n^2$. Claramente, enquanto a primeira sequência tende a mais infinito, a segunda tende a menos infinito. Entretanto, por um lado

$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(n^3 - n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2(n-1) = +\infty$

enquanto por outro, $\lim_{n\to\infty}(y_n + x_n) = \lim_{n\to\infty}(-n^2 + n^3) = \lim_{n\to\infty} - n^2(n-1) = -\infty$

EXEMPLO 3: Para terminar a verificação do que foi dito anteriormente, observe mais este exemplo. Tomando as sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ com $x_n = n^2 + (-1)^n$ e $y_n = -n^2$ temos a primeira sequência tendendo a mais infinito, e a segunda tendendo a menos infinito, enquanto $\lim_{n\to\infty}(y_n + x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n^2 + (-1)^n - n^2\right) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$, que simplesmente não existe!

PROPOSIÇÃO 2.3.3 Dada uma sequência $(x_n)_{n\in N}$ tal que $x_n > 0$ para todo n. Então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty$.

Demonstração:

Dada uma sequência $(x_n)_{n\in N}$ tal que $x_n > 0$ para todo n e suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Então, para todo k > 0, existe n_k para o qual $|x_n| = x_n < \frac{1}{k}$ para todo $n > n_k$. Neste caso, $\frac{1}{x_n} > k$ para todo $n > n_k$, implicando em $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty$.

Por outro lado, se $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty$, tomando k>0 temos, por definição, que existe n_k para o qual $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{k}$ sempre que $n > n_k$. Segue que $|x_n| = x_n = \frac{1}{(1/x_n)} < \frac{1}{(1/k)} = k$ para todo $n > n_k$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, como queríamos demonstrar.

PROPOSIÇÃO 2.3.4 Suponhamos que $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ sejam sequências de números positivos. Se existe c > 0 tal que $x_n > c$ e se $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \infty$. Por outro lado, se $(x_n)_{n\in N}$ for limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$.

Demonstração: exercício.

Ao contrário da PROPOSIÇÃO 2.3.2, a PROPOSIÇÃO 2.3.4 não abrange sequências tendendo ambas a mais infinito. Na verdade, neste caso, $\lim_{n\to\infty} x_n$ pode ser infinito, menos infinito ou mesmo simplesmente não existir.

Vamos agora introduzir dois exemplos de vital importância nas áreas de análise, cálculo ou mesmo teoria dos números.

EXEMPLO 1: Dado um número real a > 1, considere a sequência $(x_n)_{n\in N}$ com $x_n = \frac{a^n}{n}$ para todo n. Esta sequência diverge, tendendo ao infinito. De fato, se a > 1, podemos reescrever a como sendo a = h + 1, onde h > 0. Assim, considerando n > 2, temos que $a^n = (1+h)^n > 1 + n \cdot h + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot h^2$ e, assim, $\frac{a^n}{n} > \frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2} \cdot h^2$. Desta forma, $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} > \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2} \cdot h^2 \right) = \infty$.

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para concluir que, dado um número real a > 1 e um número inteiro positivo p, a sequência $(x_n)_{n\in N}$ com $x_n = \frac{a^n}{n^p}$, para todo n, $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty$.

Em particular, este resultado nos diz que a sequência formada pelas potências n-ésimas cresce mais rapidamente que a sequência formada pelas potências p-ésimas (p fixo) de n.

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico, estudamos mais algumas propriedades sobre sequências, em particular:

- Aprendemos a encontrar o limite de uma sequência confrontando-a com outras sequências de mesmo limite (regra do confronto).

- Estudamos as propriedades de limite de sequências convergentes.

- Vimos mais alguns critérios de convergência como, por exemplo, o critério da razão para sequências.

- Definimos sequências divergentes por meio de limite infinito.

- Salientamos que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, apenas uma notação que indica o comportamento das sequências para valores muito grandes de n.

- Estudamos algumas propriedades de limites infinitos.

AUTOATIVIDADE

Agora vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico por meio de alguns exercícios.

1 Demonstre a Regra do Confronto.

2 Dadas duas sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, prove que $\lim\limits_{n\to+\infty}[x_n - y_n] = a - b$.

3 Dadas duas sequências $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in N}$ é limitada, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty}[x_n \cdot y_n] = 0$.

4 Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$.

5 Dadas duas sequências reais $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$.tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ e $(y_n)_{n\in N}$ é limitada inferiormente. Então $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \infty$

6 Suponhamos que $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ sejam sequências de números positivos. Mostre que existe c > 0 tal que x_n > c e se $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$. Por outro lado, se $(x_n)_{n\in N}$ for limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

SÉRIES NUMÉRICAS

1 INTRODUÇÃO

Nos tópicos anteriores, estudamos as sequências numéricas, suas propriedades e maneiras de concluirmos sua convergência ou divergência. A partir de agora, vamos estender a noção de sequências para séries numéricas. Para isso, consideremos $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência de números reais, e vamos construir uma nova sequência da seguinte forma:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 \\ S_2 = x_1 + x_2 \\ S_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \\ S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \\ \vdots \end{cases}$$

Note que, a cada novo número natural m que consideramos, o termo geral desta sequência adiciona uma nova parcela ao termo anterior, tornando-se a soma dos m primeiros termos da sequência de origem. Como os números naturais são infinitos, assim como a sequência, os termos da série também são infinitos.

DEFINIÇÃO 2.4.1 Dada uma sequência numérica $(x_n)_{n\in N}$, definimos uma série numérica como sendo a soma dos termos desta sequência, e a denotamos por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, ou simplesmente, por $\sum x_n$.

Mas faz sentido falarmos em somas de termos infinitos? Sim, faz. Vamos entender melhor como uma série funciona.

EXEMPLO 1: Dada a sequência $(x_n)_{n\in N}$, com $x_n = n$, considere a série dada por $\sum x_n = \sum n$:

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_2 = 1+2 = 3 \\ S_3 = 1+2+3 = 6 \\ \vdots \\ S_n = 1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2} \\ \vdots \end{cases}$$

Como estamos adicionando números cada vez maiores, os termos vão ficando cada vez maiores!

EXEMPLO 2: Consideremos agora a série obtida pela sequência $(x_n)_{n\in N}$, com $x_n = \dfrac{1}{2^n}$. Então

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{1}{2} \\ S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \\ \vdots \\ S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n} \\ \vdots \end{cases}$$

Vamos agora trabalhar um pouco sobre estas somas.

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{1}{2} \\ S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2+1}{4} = \dfrac{3}{4} \\ S_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{4+2+1}{8} = \dfrac{7}{8} \\ \vdots \\ S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n} = ? \\ \vdots \end{cases}$$

Vamos avaliar a última equação anterior:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^3 + 2^2 + 2 + 1}{2^n}$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^{3}+2^{2}+2+\left(2-1\right)}{2^{n}}$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^{3}+2^{2}+\left(2+2\right)-1}{2^{n}}$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^{3}+2^{2}+2\cdot 2-1}{2^{n}}$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^{3}+2^{2}+2^{2}-1}{2^{n}}$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^{3}+2\cdot 2^{2}-1}{2^{n}}$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^{3}+2^{3}-1}{2^{n}}$$

$$=\ldots$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n-1}-1}{2^{n}}$$

$$=\frac{2^{n}-1}{2^{n}}$$

Note que, à medida que n vai crescendo, os termos somados vão se tornando cada vez menores e, desta forma, as somas vão se aproximando cada vez mais de 1. Na verdade, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n}-1}{2^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}1-\frac{1}{2^{n}}=1$

Resumindo, a partir de uma sequência $\left(x_n\right)_{n\in N}$, construímos uma nova *sequência* $\left(s_n\right)_{n\in N}$ *de números* reais que converge para 1. Visto isso, estamos em condições de definir convergência de séries

DEFINIÇÃO 2.4.2 Dada uma sequência $\left(x_n\right)_{n\in N}$, dizemos que a série $\sum x_n$ é convergente se existir um número real s tal que $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}x_n=s$. Neste caso, chamamos o limites de soma da série. Caso não exista tal elemento s, dizemos que a série é divergente.

Vamos estudar a seguir alguns casos especiais de séries numéricas, algumas já conhecidas por você.

2 EXEMPLOS DE SÉRIES CONVERGENTES E SÉRIES DIVERGENTES

2.1 A SÉRIE GEOMÉTRICA

A série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge para 1, conforme já vimos. Na verdade, o fato do número 2 ter aparecido não influencia na convergência: para qualquer a>1, a série $\sum \frac{1}{a^n}$ converge. Esta série é chamada de série geométrica, uma vez que a sequência que a origina nada mais é do que uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{a}$.

Observe que, como a > 1, a razão $\frac{1}{a}$ é um valor real positivo menor do que 1. Assim, se denotarmos a série geométrica de forma mais geral, como $\sum b \cdot r^n$, afirmamos que r converge sempre que 0 < r < 1; na verdade, sempre que r for um número real entre -1 e 1. Vamos provar esta afirmação:

Considerando a série $\sum b \cdot r^n$, temos que, para n > 1, $S_n = b + br + br^2 + ... + br^n$. Vamos agora reescrever o termo geral de uma maneira conveniente, através de um artifício de cálculo. Se multiplicarmos o termo geral por r, temos $r \cdot S_n = br + br^2 + ... + br^{n+1}$. Fazendo a subtração $S_n - r \cdot S_n$, temos

$$-\begin{cases} s_n = b + br + br^2 + ... + br^n \\ r \cdot s_n = br + br^2 + ... + br^{n+1} \end{cases}$$

$$s_n - r \cdot s_n = b - br^{n+1}$$

$$s_n(1-r) = b(1-r^{n+1})$$

$$s_n = b\frac{(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Tomando o limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b\frac{(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{b}{1-r} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-r^{n+1}) = \frac{b}{1-r}$$

Note que a condição de r ser uma valor entre -1 e 1 é vital para garantir que $\lim_{n\to\infty}(1-r^{n+1}) = 1$: caso contrário, este limite tenderia ao infinito.

CONCLUSÃO: Sejam b e r dois números reais. A série geométrica $\sum b \cdot r^n$ será convergente se r for um número tal que -1 < r < 1. Caso contrário, a série será divergente.

Assim, é fácil concluir se uma série geométrica é divergente ou convergente e, neste caso, sabemos para onde ela converge. Vamos aplicar esta importante afirmação em alguns exemplos:

EXEMPLO 1: A série $\sum \frac{5}{6^n}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{6^n}$ e, portanto convergente, de tal forma que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{6^n} = \frac{5}{1-\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{5}{\left(\frac{6-1}{6}\right)} = \frac{5}{\left(\frac{5}{6}\right)} = 6.$$

EXEMPLO 2: A série $\sum 3 \cdot 4^n$ é uma série geométrica divergente, pois r = 4 > 1.

EXEMPLO 3: A série $\sum \frac{(-5)^n}{6}$ é uma série geométrica divergente, pois r = -5 < -1.

EXEMPLO 4: A série $\sum \frac{3}{2^{n-2}}$ é uma série geométrica convergente. De fato,

$$\sum \frac{3}{2^{n-2}} = \sum \frac{3}{2^n \cdot 2^{-2}} = \sum \frac{3 \cdot 2^2}{2^n} = \sum \frac{12}{2^n}$$

Como $\frac{1}{2} < 1$, segue que a série converge para $\frac{12}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{12}{\left(\frac{2-1}{2}\right)} = \frac{12}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 24.$

EXEMPLO 5: A série $\sum 2^{2n} 3^{1-n}$ é uma série geométrica. Observe:

$$\sum 2^{2n} 3^{1-n} = \sum \left(2^2\right)^n 3^1 3^{-n} = \sum \frac{4^n 3}{3^n} = \sum 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Como a razão desta série é maior do que 1, segue que ela é divergente.

2.2 A P-SÉRIE

Consideremos inicialmente a série conhecida como série harmônica: $\sum \frac{1}{n}$. Esta série é conhecida como série harmônica e iremos mostrar que ela é divergente.

Vamos escrever algumas somas parciais desta série e verificar como eles vão crescendo, à medida que n cresce:

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2}$$
$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}$$

Com o mesmo tipo de manipulação, temos

$$s_{16} > 1 + \frac{4}{2}, \qquad s_{32} > 1 + \frac{5}{2} \qquad s_{64} > 1 + \frac{6}{2}, \ldots \qquad s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Portanto, como parte da sequência $(s_n)_{n \in N}$ diverge, segue que a sequência diverge também, implicando a série divergir.

Mais a frente, mostraremos que, embora a série harmônica seja divergente, a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente. Na verdade, para qualquer p > 1, segue que $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente.

CONCLUSÃO: A p-série $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente se p>1 e divergente se p $\leq$ 1.

EXEMPLO: A série $\sum \frac{1}{n^8}$ é convergente.

2.3 A SÉRIE $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

Outra série que merece nossa atenção especial é a série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Vamos mostrar que esta série é convergente. Observe que podemos escrever $\frac{1}{n(n+1)}$ como uma adição de duas frações: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. De fato,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n+1)} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{n(A+B) + A}{n(n+1)}$$

Então temos a seguinte igualdade

$$\frac{(A+B)\cdot n + A}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{0\cdot n + 1}{n(n+1)}$$

Implicando em $\begin{cases} A+B=0 \rightarrow A=-B \\ A=1 \end{cases}$

Consideremos agora as somas parciais da série em questão:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Agora $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$

CONCLUSÃO: A série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge para 1.

Você já deve ter percebido que nem sempre é fácil ver se uma série converge ou não. Para isso, precisamos lançar mão de alguns resultados que, juntamente com as séries especiais que acabamos de ver, nos ajudarão.

3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA PARA SÉRIES NUMÉRICAS

O primeiro critério, na verdade, não é utilizado como critério de convergência estritamente, mas sim de divergência.

PROPOSIÇÃO 2.4.1 Se $\sum x_n$ é uma série convergente, então a sequência de termos $(x_n)_{n\in N}$ tem limite igual a 0.

Demonstração:

Seja $\sum x_n$ uma série numérica convergente. Então, existe um número real s tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Em particular, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$, logo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty}\left[(x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}) + x_n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[s_n - s_{n-1}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s \\ &= 0\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

EXEMPLOS: As séries $\sum \frac{5}{6^n}$, $\sum \frac{3}{2^{n-2}}$, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^8}$ são todas convergentes.

Isso significa que $\frac{5}{6^n}$, $\frac{3}{2^{n-2}}$, $\frac{1}{n(n+1)}$, $\frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^8}$ tendem a zero à medida que n tende ao infinito.

Observe que este critério não é muito útil para concluirmos a respeito da convergência de uma série, uma vez que esta é a hipótese. Entretanto, se negarmos este resultado, obtemos o seguinte:

COROLÁRIO 2.4.1 (Critério de Divergência) Se $(x_n)_{n\in N}$ é uma sequência que possui limite diferente de 0, então a série associada $\sum x_n$ é uma série que não converge, isto é, a série é divergente.

EXEMPLO: A série $\sum (-1)^{n+1}$ é divergente, pois $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \neq 0$.

Atenção: se o limite da sequência for zero, nada podemos concluir. De fato, o termo geral da série $\sum \frac{1}{n}$ tende a zero e a série diverge; por outro lado, o termo geral de $\sum \frac{1}{n^2}$ também tende a zero, mas esta série converge.

EXEMPLO: Consideremos a série $\sum \frac{n+1}{n}$. É fácil ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right) = 1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1$. Pelo corolário anterior, segue que esta série é divergente.

Uma série $\sum x_n$ pode divergir por dois motivos: ou as somas parciais $x_1 + x_2 + ... + x_n$ não são limitadas, ou elas oscilam em torno de algum valor (por exemplo, a série $\sum (-1)^n$). Particularmente, se a série for tal que seus termos tenham sempre o mesmo sinal, o último caso descrito não pode acontecer. Assim,

TEOREMA 2.4.1 Uma série $\sum x_n$ tal que $x_n \geq 0$, para todo natural n, é convergente se, e somente se, suas somas parciais formam uma sequência limitada, isto é, se existir M > 0 tal que.

$\sum_{n=1}^{m} x_n < M$, para todo natural m.

Demonstração:

Se $\sum x_n$ é convergente, segue por definição que $(s_n)_{n\in N}$ é convergente e, pelo TEOREMA 2.2.2, que $(s_n)_{n\in N}$ é limitada.

Por outro lado, se $\sum x_n$ é uma série tal que $x_n \geq 0$, para todo natural n, então $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq ...$, ou seja, a sequência $(s_n)_{n\in N}$ é monótona. Assim, se $(s_n)_{n\in N}$ for limitada, pelo TEOREMA 2.2.3, $(s_n)_{n\in N}$ é convergente e, portanto, $\sum x_n$ é convergente, como queríamos demonstrar.

Como corolário deste Teorema, temos o Critério de Comparação para séries:

COROLÁRIO 2.4.2 (Critério de Comparação para Séries): Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries tais que x_n e y_n são maiores ou iguais a zero, qualquer que seja n. Se existir c >0 tal que $x_n \leq c \cdot y_n$ a partir de certo n_0, então

(i) Se $\sum y_n$ for convergente, então $\sum x_n$ também será.

(ii) Se $\sum x_n$ for divergente, então $\sum y_n$ também será.

Demonstração:

Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries tais que x_n e y_n são maiores ou iguais a zero, e c > 0 tal que $x_n \leq c \cdot y_n$ a partir de certo n_0. Consideremos agora as somas parciais de ambas as séries $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ e $t_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$. Como $x_n \leq c \cdot y_n$ a partir de certo n_1, segue que $s_n \leq c \cdot t_n$ para todo $n > n_1$.

(i) Se $\sum y_n$ for convergente, então, pelo Teorema anterior, existe M > 0 tal que $t_n < M$ para todo n. Em particular, $s_n \leq c \cdot t_n < c \cdot M$ para todo $n > n_0$. Como existem finitos números menores do que n_0, existe M'> 0 para o qual s_n < M' (basta tomar M'> max $\{s_1, s_2, s_3, ..., s_{n-1}, c \cdot M\}$. Assim, as somas parciais da série $\sum x_n$ são limitadas, implicando, pelo Teorema anterior, em $\sum x_n$ ser convergente).
(ii) exercício.

EXEMPLO 1: As séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ possuem apenas termos positivos. Além disso, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ para todo n. Como a série $\sum \frac{1}{n}$ é divergente, segue que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ também o é.

EXEMPLO 2: As séries $\sum \frac{1}{n \cdot 2^n}$ e $\sum \frac{1}{2^n}$ possuem apenas termos positivos. Além disso, $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ para todo n. Como a série $\sum \frac{1}{2^n}$ é convergente, segue que $\sum \frac{1}{n \cdot 2^n}$ também o é.

As séries que estudamos até agora foram basicamente positivas, isto é, aquelas em que o termo geral da série é sempre positivo. Como a multiplicação de uma série convergente por uma constante real também converge, podemos analisar as séries cujos termos gerais são sempre negativos também. Mas o que acontece com as séries em que os termos ora são positivos ora são negativos?

4 SÉRIES ALTERNADAS

Uma série alternada é aquela em cujos termos são alternadamente positivos e negativos. As séries a seguir, por exemplo, são séries alternadas:

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$$

$$\sum \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + ...$$

$$\sum \frac{(-2)^n}{n} = -2 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} + \frac{16}{4} - \frac{32}{5} + ...$$

Podemos reescrever qualquer uma destas séries como $\sum (-1)^n y_n$ ou $\sum (-1)^{n+1} y_n$, de forma que $y_n \geq 0$ para todo n. Note que os critérios que estudamos até agora são específicos para séries cujos termos gerais são todos positivos ou todos negativos, isto é, não abrangem as séries alternadas. Entretanto, existe um critério de convergência específico para este tipo de séries, desde que a sequência $(y_n)_{n \in N}$ seja não crescente.

TEOREMA 2.4.3 Seja $(y_n)_{n\in N}$ uma sequência não crescente de tal forma que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Então a série alternada $\sum(-1)^{n+1} y_n$ é convergente.

Demonstração:

Seja $\sum(-1)^{n+1} y_n$ uma série tal que $(y_n)_{n\in N}$ é uma sequência não crescente com $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Então $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq y_4 \geq ... \to 0$.

Consideremos separadamente as somas parciais pares e ímpares separadamente:

$$
\begin{aligned}
& s_1 = y_1 \geq 0 \\
& s_3 = y_1 - y_2 + y_3 \\
& = y_1 - \underbrace{(y_2 - y_3)}_{\geq 0} \\
& \leq y_1 = s_1 \\
& s_5 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 \\
& = y_1 - \underbrace{(y_2 - y_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(y_4 - y_5)}_{\geq 0} \\
& \leq s_3 \leq s_1 \\
& s_7 == y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 \\
& = y_1 - \underbrace{(y_2 - y_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(y_4 - y_5)}_{\geq 0} - \underbrace{(y_6 - y_7)}_{\geq 0} \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1 \\
& \vdots \\
& 0 \leq s_{2n-1} \leq ... \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1
\end{aligned}
$$

para todo n>2. Logo, existe s' positivo tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = s'$.

Vamos agora analisar as somas parciais pares:

$$
\begin{aligned}
& s_2 = y_1 - y_2 \geq 0 \\
& s_4 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \\
& \quad = (y_1 - y_2) + \underbrace{(y_3 - y_4)}_{\geq 0} \geq s_2 \\
& s_6 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 \\
& \quad = (y_1 - y_2) + \underbrace{(y_3 - y_4)}_{\geq 0} + \underbrace{(y_5 - y_6)}_{\geq 0} \geq s_4 \geq s_2 \\
& s_8 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 \\
& \quad = (y_1 - y_2) + \underbrace{(y_3 - y_4)}_{\geq 0} + \underbrace{(y_5 - y_6)}_{\geq 0} + \underbrace{(y_7 - y_8)}_{\geq 0} \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2 \\
& \vdots \\
& s_{2n} \geq ... \geq s_8 \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Note que a sequência formada pelas somas parciais pares é uma sequência não decrescente. Além disso, $s_{2n} = s_{2n+1} - y_{2n+1} \leq s_{2n+1}$, ou seja, a sequência $\left(s_{2n}\right)_{n \in N}$ é não decrescente limitada. Então existe s′′ tal que $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s''$. Agora

$$s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(s_{2n+1} - y_{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = s' - 0 = s'$$

Portanto existe s = s′= s′′ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, implicando na série alternada convergir para este mesmo valor, como queríamos demonstrar.

EXEMPLO: Considere a série alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Sabemos que a sequência $\left(y_n\right)_{n \in N}$ tal que $y_n = \frac{1}{n}$ é não crescente e que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Portanto esta série alternada é convergente.

Vimos alguns critérios para saber quando uma série é convergente. Algumas séries têm uma espécie de convergência mais forte. Elas não apenas convergem, mas convergem também em módulo: são as séries absolutamente convergentes. Vamos entender melhor como se dá esta convergência a seguir.

5 SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Uma série $\sum x_n$ é chamada de absolutamente convergente quando $\sum |x_n|$ é uma série convergente. Por exemplo, série $\sum\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ é absolutamente convergente, uma vez que $\sum\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum\left|-\frac{1}{2}\right|^n = \sum \frac{1}{2^n}$ é convergente.

Claramente, toda série convergente de termos positivos é absolutamente convergente. A série geométrica $\sum b \cdot r^n$ com -1 < r < 1 é absolutamente convergente. Mas atenção: nem toda série convergente é absolutamente convergente.

EXEMPLO: Vimos que a série alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. É convergente. Por outro lado, esta série não é absolutamente convergente, visto que $\sum\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ é a série harmônica, que sabemos ser divergente.

Apesar de nem toda série convergente ser absolutamente convergente, a recíproca é verdadeira:

TEOREMA 2.4.4 Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração:

Seja $\sum x_n$ uma série absolutamente convergente. Então, $\sum |x_n|$ converge.

Logo $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |x_n| = L$, para algum L real. Agora, $\sum_{n=1}^{m} |x_n| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|$ e $\sum_{n=1}^{m} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|$. Logo $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |x_n| = L$ e, portanto, $\sum x_n$ também é convergente, como queríamos demonstrar.

Outra propriedade importante sobre série diz respeito às séries que podem ser escritas em termos de duas ou mais séries convergentes.

TEOREMA 2.4.5 Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes. Então as séries $\sum c \cdot x_n$, $\sum (x_n + y_n)$ e $\sum (x_n - y_n)$ também serão e $\sum c \cdot x_n = c \cdot \sum x_n$, $\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$ e $\sum (x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n$.

Demonstração:

Se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são duas séries convergentes e s_n e t_n são suas respectivas somas parciais, existem s e t tais que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ e $\lim_{n\to\infty} t_n = t$.

Consideremos a série $\sum (x_n + y_n)$. Vamos analisar as suas somas parciais:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (x_1 + y_1) = s_1 + t_1 \\
w_2 &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\
&= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\
&= s_2 + t_2 \\
w_3 &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) \\
&= s_3 + t_3 \\
&\vdots \\
w_n &= s_n + t_n
\end{aligned}
$$

Agora, das propriedades de limite sobre sequências, segue que $\lim_{n\to\infty} (w_n) = \lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t$

Portanto, $\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$.

As demais propriedades são mostradas de maneira análoga.

EXEMPLO: Vamos analisar a série $\sum\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

Sabemos que as séries $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ e $\sum\frac{1}{2^n}$ convergem ambas para 1. Portanto, pelo teorema anterior, temos que $\sum\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$ converge pra $3 \cdot 1 + 1 = 4$.

6 TESTE DA RAZÃO E TESTE DA RAÍZ

Finalmente, vamos enunciar dois resultados sobre séries numéricas que permitem decidirmos se uma série é convergente ou divergente.

TEOREMA 2.4.6 (Teste da D'Alembert ou Teste da Razão) Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência tal que $x_n \neq 0$ para todo natural n.

(i) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|<1$, então a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|>1$, então a série $\sum x_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=1$, então nada podemos concluir.

Demonstração:

Sejam $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência tal que $x_n \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=L$ para todo natural n e $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=L$, e seja c um número real entre L e 1. Se L for menor do que 1, c também será.

Então, a partir de certo n_0, $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|<c$ para todo $n > n_0$, ou seja, $|x_{n+1}|<c\cdot|x_n|$. Assim

$$
\begin{aligned}
&|x_{n+1}|<c\cdot|x_n|\\
&|x_{n+2}|<c\cdot|x_{n+1}|<c^2\cdot|x_n|\\
&|x_{n+3}|<c\cdot|x_{n+2}|<c^3\cdot|x_n|\\
&\vdots\\
&|x_{n+j}|<c^j\cdot|x_n|
\end{aligned}
$$

Com j = 1, 2,…

Assim, a partir de n_0, a série é majorada pela série $\sum_j c^j \cdot |x_n| = |x_n| \cdot \sum_j c^j$.

Por outro lado, a série $\sum_j c^j$ é uma série geométrica. Assim, se L < 1, c < 1 e a série $\sum_j c^j$ é convergente: pelo teste da comparação, $\sum |x_n|$ é convergente e, portanto, $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

Agora, se L > 1, c > 1, e a partir de certo n_0, $|x_{n+1}| > |x_n|$, $|x_{n+2}| > |x_{n+1}| > |x_n|$, $|x_{n+3}| > |x_{n+2}| > |x_n|$, …, $|x_{n+j}| > |x_n|$, com j =1, 2, …

Então o termo geral da sequencia não tende a zero, implicando a série ser divergente, pelo critério da divergência, como queríamos demonstrar.

Na demonstração anterior, utilizamos o conceito de majoração. Majorar uma série $\sum x_n$ é encontrar outra série $\sum y_n$ de tal forma que $x_n \leq y_n$ para todo n.

EXEMPLO: Vamos verificar se a série $\sum \frac{n!}{2^n}$ converge.

Observe que $x_n = \frac{n!}{2^n}$ e $x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$.
Logo

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}\right| = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{(n+1)}{2}$$

Então $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2} > 1$, ou seja, a série é divergente.

EXEMPLO 2: Já a série $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ é convergente, pois

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{(-1)^n}{(n+1)!}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(-1)^n}\right| = \left|\frac{(-1)^n \cdot (-1)}{(n+2)\cdot(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(-1)^n}\right| = \left|\frac{-1}{n+2}\right| = \frac{1}{n+2}$$

Então $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2} = 0 < 1$

Observe que o Teste da Razão é indicado sempre que o termo geral da série contém uma potência n-ésima de algum número ou fatorial de n. Por outro lado, se não há fatorial no termo geral, mas apenas potências n-ésima, existe um teste de convergência (e divergência) mais útil, conhecido como teste da raiz.

TEOREMA 2.4.7 (Teste da Raiz) Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência real.

(i) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} < 1$, então a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} > 1$, então a série $\sum x_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} = 1$, então nada podemos concluir.

Demonstração:

Sejam $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} = L$, e seja c um número real entre L e 1. Se L for menor do que 1, c também será. Então, a partir de certo n_0, $\sqrt[n]{|x_n|} < c$ para todo $n > n_0$, ou seja, $|x_n| < c^n$. Assim, a partir de n_0, a série $\sum|x_n|$ é majorada pela série geométrica $\sum c^n$.

Se L < 1, c < 1 e a série $\sum c^n$ é convergente: pelo teste da comparação, $\sum|x_n|$ é convergente e, portanto, $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

Agora, se L > 1, c > 1, e a partir de certo n_0, $\sqrt[n]{|x_n|} > c$ para todo $n > n_0$, ou seja, $|x_n| > c^n$. Assim, a partir de n_0, a série geométrica $\sum c^n$ (que é divergente uma vez que c > 1) é majorada pela série $\sum|x_n|$ e, portanto, $\sum|x_n|$ diverge.

EXEMPLO: Vamos analisar a série $\sum n\cdot a^n$, onde a é um número real qualquer (mas fixo!). Não precisamos de nenhum critério de convergência para concluir que esta série é divergente se $|a| \geq 1$. Entretanto, não é tão simples tirar algum tipo de conclusão no caso em que $|a| < 1$. Para isso, vamos aplicar o teste da raiz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n\cdot a^n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a|^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot|a|\right) = |a|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

Já mostramos que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ no início desta unidade. Segue que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n\cdot a^n|} = |a|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = |a|.$$

Assim, se a for um número cujo valor absoluto é menor do que 1, a série $\sum n\cdot a^n$ é convergente.

O mesmo resultado valeria para as séries $\sum n^2 \cdot a^n$, $\sum n^3 \cdot a^n$, $\sum n^4 \cdot a^n$, ...

7 O TESTE DA INTEGRAL

O último teste que iremos apresentar neste Caderno de Estudos se chama teste da Integral. Ele consiste em comparar o termo geral de uma série com uma função sobre a qual sabemos calcular a integral indefinida. Observe que a ideia deste teste vem justamente do fato da definição de integral indefinida de Riemann vir de uma soma infinita de áreas, o que está intimamente ligado às séries.

TEOREMA 2.4.8 Seja f uma função contínua, positiva e decrescente no intervalo $(1, +\infty)$e seja $x_n = f(n)$. Então a série $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente.

Não iremos demonstrar este teorema por acharmos que ele é de fácil aceitação. Entretanto, caso você se sinta desconfortável, pode encontrá-lo demonstrado em qualquer bom livro de Cálculo Diferencial e Integral.

EXEMPLO: Vamos mostrar que a série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ é convergente. Para isso, consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Então

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[arctg(x) \right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[arctg(t) - arctg(1) \right] = \lim_{t\to\infty} \left[arctg(t) - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Como a integral converge, segue que a série também converge.

8 COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE SÉRIES

Aprendemos neste tópico uma série de critérios sobre convergência e divergência de séries e é fácil se perder no meio de tantos resultados. Assim, vamos tentar sintetizar um roteiro para facilitar suas conclusões sobre séries.

1. Observe se a série se assemelha com alguma especial que você já conhece. Por exemplo, se é uma p-série, uma série geométrica, ou se pode separá-la em séries com estas características.
2. Se a série for uma série alternada, verifique se satisfaz o critério para séries alternadas.
3. Se você observar que o limite do termo geral da sequência que origina a série é diferente de zero, pelo critério da divergência, a série é divergente; caso contrário, é necessário pensar em outro critério.

4. Se a série possuir fatorial de n no seu termo geral, aplique o teste da razão. Caso o limite dê menor do que 1, você pode concluir pela convergência da série, se der maior do que 1, a série é divergente; se for igual a 1, outro critério deve ser considerado.
5. Se a série possuir potência n-ésima no seu termo geral, aplique o teste da raiz. Caso o limite dê menor do que 1, você pode concluir que a série é convergente; se der maior do que 1, a série é divergente; se for igual a 1, outro critério deve ser considerado (você pode aplicar o teste da razão, por exemplo).
6. Analise se a série é absolutamente convergente.
7. Se a função associada ao termo geral da série for tal que a integral indefinida seja fácil de ser calculada, aplique o Teste da Integral.

LEITURA COMPLEMENTAR

A ORIGEM DAS SÉRIES INFINITAS

Geraldo Ávila

As séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade; e a primeira a ocorrer na História da Matemática é uma série geométrica de razão ¼, que intervém no cálculo da área da parábola feito por Arquimedes (ÁVILA, 1986). Seguindo a tradição grega de evitar o infinito, Arquimedes não procede a somar todos os termos da referida série; ele observa que a soma de certa quantidade à reduzida de ordem n produz uma quantidade independente de n, que é a soma da série.

Também não é de hoje que se sabe que uma série cujo termo geral tende a zero nem sempre tem soma finita. Esse fato foi descoberto por Nicole Oresme (1323-1382), em conexão com a série harmônica. De fato, é a ele que devemos a demonstração de que a série harmônica é divergente. Esse é um fato notável, que jamais seria descoberto senão através de uma demonstração como a de Oresme. Mesmo hoje em dia, com o auxílio do computador, no qual podemos somar sucessivamente os termos de uma série infinita, não há como descobrir se uma série de termo geral tendendo a zero é convergente ou não. Pois, mesmo deixando de lado os erros de arredondamento e possíveis limitações do computador ao lidar com números possuindo cada vez mais casas decimais, as adições vão se tornando arbitrariamente pequenas e cada vez mais imperceptíveis. No caso da série harmônica, por exemplo, estima-se que para fazer sua soma chegar a 35 teríamos de somar cerca de 10^{10} de seus termos. Se a soma de cada termo tomasse um segundo de tempo, isso demoraria cerca de 30 milhões de anos!

No século XIV as séries infinitas tiveram bastante popularidade entre os cientistas, principalmente devido aos estudos então desenvolvidos sobre o movimento. A título de ilustração, seja a série

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots = \sum \frac{n}{2^n},$$

que foi considerada, por volta de 1350, por Richard Swineshead, do grupo Merton College da Universidade de Oxford. Essa série surgiu a propósito de um movimento que se desenvolveria durante o intervalo de tempo [0, T] da seguinte maneira: a velocidade permaneceria constante durante a primeira metade do intervalo, dobraria no segundo quarto do intervalo, triplicaria no terceiro subintervalo (de duração T/8), quadruplicaria no quarto subintervalo (de duração T/16) etc. Como se vê, a soma da série assim construída é a soma dos produtos da velocidade pelo tempo em cada um dos sucessivos subintervalos de tempo e representa o espaço total percorrido pelo móvel.

Swineshead achou o valor 2 para a soma através de um longo e complicado argumento verbal. Mais tarde, Oresme, que era ligado à Universidade de Paris, deu uma explicação geométrica bastante interessante para a soma da série, que representa a área total da figura formada com uma infinidade de retângulos verticais. O raciocínio de Swineshead, combinado com a interpretação geométrica, de Oresme, consiste em substituir o movimento original por uma sucessão infinita de movimentos todos com velocidade igual à velocidade original: o primeiro no intervalo [0, T]; o segundo no intervalo de tempo [T/2, T], o terceiro no intervalo [T/4, T]; e assim por diante. Vê-se assim que o espaço percorrido (soma das áreas dos retângulos) é igual à soma das áreas de outros retângulos, dada por uma série geométrica:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum \frac{1}{2^n} = 2.$$

Hoje em dia, com a notação que possuímos, talvez a maneira mais natural de somar a série de Swineshead seja esta:

$$\begin{aligned} S &= \sum \frac{n}{2^n} = \sum \frac{1+(n-1)}{2^n} = \sum \frac{1}{2^n} + \sum \frac{(n-1)}{2^n} = \sum \frac{1}{2^n} + \sum \frac{n}{2^{n+1}} \\ &= \sum \frac{1}{2^n} + \sum \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2^{n+1}} \right) = 1 + \frac{1}{2} \sum \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{S}{2} \end{aligned}$$

Donde S = 2.

As séries tiveram um papel importante no desenvolvimento do Cálculo, desde o início desse desenvolvimento no século XVII. Mais foi no século XIX que as ideias de convergência e soma de uma série infinita atingiram plena maturidade, e isto devido, principalmente, ao trabalho de Cauchy, que falaremos a seguir:

CAUCHY E AS SÉRIES INFINITAS

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) é a figura mais influente da Matemática na França de sua época. Como professor da Escola Politécnica ele escreveu vários livros didáticos, bastante inovadores, por isso mesmo tiveram grande influência por várias décadas. O primeiro desses livros é o *Cours d'Analyse* de 1821, cujo capítulo VI é dedicado às séries, e contém quase todos os resultados que discutimos. É também aí que aparece o "Critério e Convergência de Cauchy".

O pouco mais de Cauchy escreve em seguida sobre este critério nada acrescenta de substâncial. Cauchy sequer acena com uma demonstração – parece julgá-la desnecessária – limitando-se a usar este critério para provar que a série harmônica é divergente e que a série harmônica alternada é convergente.

Essas são as únicas aplicações em que Cauchy utiliza seu critério de convergência, podendo-se então dizer que tal critério não teria feito falta nenhuma a Cauchy. Sua importância só se faria sentir mais tarde, no final do século, no trato de importantes problemas de aproximação, em equações diferenciais e Cálculo das Variações.

Embora, como dissemos, o trabalho de Cauchy tenha tido influência decisiva no desenvolvimento e consolidação do estudo da convergência das séries no século XIX, esse desenvolvimento vinha desabrochando desde o final do século anterior. E a esse respeito, devemos mencionar aqui o importante trabalho de um ilustre autor português, José Anastácio da Cunha. As séries infinitas são discutidas no capítulo IX ("livro" IX) de sua obra "Princípios Matemáticos", onde se pode identificar uma verdadeira antecipação de muitas ideias de Cauchy e seus contemporâneos, inclusive o "Critério de Convergência de Cauchy".

FONTE: Adaptado de: Ávila (2010, p. 69-71)

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico, começamos nosso estudo sobre séries, em particular:

- Definimos séries numéricas.
- Vimos o que significa uma série convergir ou divergir.
- Estudamos exemplos particulares de séries numéricas.
- Mostramos que, se o limite do termo geral de uma série é não nulo, a série é divergente.
- Vimos que é possível compararmos séries e, em alguns casos, tirarmos conclusões a respeito da sua convergência ou não a partir desta comparação.
- Estabelecemos um critério para séries alternadas.
- Definimos séries absolutamente convergentes e vimos que uma série com esta característica sempre será convergente.
- Provamos que, a multiplicação de uma série convergente por uma constante é convergente.
- Mostramos que a soma de duas séries convergentes é convergente.
- Aprendemos sobre o teste de D'Alembert, ou teste da Razão para séries.
- Provamos o teste da raiz para séries.
- Enunciamos e exemplificamos o teste da integral.

AUTOATIVIDADE

Agora vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico por meio de alguns exercícios.

1 Verifique se a série $\sum\left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge ou não.

2 Verifique se a série $\sum 2\cdot 3^n$ é ou não convergente.

3 Verifique se a série $\sum \frac{2}{n^4}$ é ou não convergente.

4 Verifique se a série $\sum \frac{12}{(-3)^n}$ é ou não convergente.

5 Verifique se a série $\sum \frac{4}{\sqrt[3]{n}}$ é ou não convergente.

6 Verifique se a série $\sum \frac{n^2}{5n^2+4}$ é ou não convergente.

7 A série $\sum\left(\frac{\cos^n x}{2^n}\right)$, para todo x, é divergente ou convergente?

8 A série $\sum\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ é divergente ou convergente?

9 Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes. Mostre que $\sum c\cdot x_n$ e $\sum(x_n - y_n)$ também são e $\sum c\cdot x_n = c\cdot\sum x_n$, e $\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n$.

10 Teste a convergência da série $\sum\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

11 Teste a convergência da série $\sum(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$.

12 Teste a convergência da série $\sum\frac{1}{n}$ por meio do teste da integral.

13 Verifique se a série $\sum\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$ é convergente.

UNIDADE 3

NÚMEROS REAIS E TOPOLOGIA NA RETA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

São objetivos desta unidade:

- familiarizar-se com demonstrações matemáticas;
- conhecer o conjunto dos números reais através de uma abordagem axiomática;
- ter contato com a área da topologia, através do estudo da reta;
- definir e trabalhar com conjuntos abertos e fechados dentro do conjunto de números reais;
- aprender o que significa ponto de acumulação;
- definir e reconhecer conjuntos compactos na reta.

PLANO DE ESTUDOS

A Unidade 3 está dividida em quatro tópicos contendo exemplos e, no final de cada uma, exercícios para lhe familiarizar com o assunto. O primeiro tópico tratará dos números reais, enquanto os outros três abordarão conteúdos que fazem parte do estudo de topologia na reta.

TÓPICO 1 – CORPOS ORDENADOS

TÓPICO 2 – O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

TÓPICO 3 – CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS

TÓPICO 4 – PONTOS DE ACUMULAÇÃO E CONJUNTOS COMPACTOS

TÓPICO 1

CORPOS ORDENADOS

1 INTRODUÇÃO

Na Unidade 1 estudamos os números naturais de uma maneira axiomática, isto é, vimos alguns axiomas que aceitamos como verdadeiros e, a partir deles, desenvolvemos a teoria. O estudo dos números reais se dá de uma maneira mais natural, a partir dos conceitos de supremo e ínfimo, que introduziremos mais à frente e da noção de corpos ordenados. Você deve se lembrar de ter estudado o conceito algébrico de corpo quando cursou a disciplina de Álgebra. Vamos retomar este conceito agora e tratar de um conjunto específico de corpos: o formado pelos corpos ordenados. Mas para que abordarmos este conteúdo algébrico aqui, em um curso de análise? Embora aprendamos Matemática como se fosse um armário repleto de gavetas, estas gavetas não são tão bem delimitadas assim. Veremos mais à frente que o conjunto dos números reais nada mais é do que um corpo ordenado e que uma boa parte de suas características vem justamente deste fato.

2 O CONCEITO DE CORPO

Quando você cursou a disciplina de Álgebra, teve contado com as estruturas algébricas que, essencialmente, são três: grupos, anéis e corpos. Essas estruturas são definidas a partir de conjuntos quaisquer que possuem uma ou duas operações binárias definidas sobre eles e que, conforme as características dos elementos frente a estas operações podem ser classificadas em uma das três categorias, ou mesmo em nenhuma delas. Não estamos agora interessados nos conjuntos tidos como grupos ou anéis, apenas nos corpos.

DEFINIÇÃO 3.1.1: Seja K um conjunto qualquer não vazio e definamos sobre este conjunto duas operações binárias, que denotaremos por '+' e por '·' e chamaremos de adição e multiplicação respectivamente:

$$\begin{aligned} + : K \times K &\to K \\ (u,v) &\mapsto u + v \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : K \times K &\to K \\ (u,v) &\mapsto u \cdot v \end{aligned}$$

Suponhamos que estas operações estejam bem definidas, isto é, que $u + v \in K$ e que $u \cdot v \in K$, quaisquer que sejam u e v elementos de K.

Dizemos então que o conjunto K munido destas duas operações, $(K, +, \cdot)$, é um corpo se as seguintes propriedades forem válidas:

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

A1 Associatividade: Dados três elementos quaisquer $u, v, w \in K$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
A2. Comutatividade: Dados dois elementos quaisquer $u, v \in K$, $u + v = v + u$.
A3. Existência de elemento neutro: existe um elemento pertencente a K, que indicamos por 0 (zero), tal que $0 + v = v$, para todo $v \in K$.
A4. Existência de elemento simétrico (ou oposto): para cada elemento $v \in K$, existe um único elemento $v' \in K$, tal que $v + v' \in K = 0$.

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

M1 Associatividade: Dados três elementos quaisquer $u, v, w \in K$, $(u \cdot v)\cdot w = u \cdot(v \cdot w)$.
M2. Comutatividade: Dados dois elementos quaisquer $u, v \in K$, $u \cdot v = v \cdot u$.
M3. Existência de elemento neutro: existe um elemento pertencente a K, que indicamos por 1 (um), tal que $1 \cdot v = v$, para todo $v \in K$.
M4. Existência de inverso multiplicativo: para cada elemento $v \in K$ não nulo, existe um único elemento $v^{-1} \in K$, tal que $v \cdot v^{-1} = 1$.

DISTRIBUTIVIDADE

D1: Dados quaisquer três elementos $u, v, w \in K$, $u \cdot(v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.

UNI

Como só trabalharemos com corpos, ao mencionarmos um corpo K, omitiremos as duas operações associadas, apenas por uma questão de simplificação de linguagem. Entretanto, jamais esqueça que a um corpo K, SEMPRE há duas operações binárias associadas.

Dado um corpo K, podemos tirar algumas conclusões sobre seus elementos da própria definição de corpo.

2.1 DEFINIÇÃO DA SUBTRAÇÃO

Vimos que os elementos de K comutam frente à adição. Então as propriedades A3 e A4 podem ser reescritas como v + 0 = v e –v + v = 0, qualquer que seja v elemento de K. Assim, podemos definir a subtração de elementos de K da seguinte forma:

$-: K \times K \to K$

$(u,v) \mapsto u - v$, onde u – v = u + (-v).

Assim, dados u, v elementos de K, existe w em K tal que u – v = w. Somando então v de ambos os lados da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} (u-v)+v &= w+v \\ u+\underbrace{(-v)+v}_{0} &= w+v \\ u+0 &= w+v \\ u &= w+v \end{aligned}$$

Resumindo, $u - v = w \Leftrightarrow u = w + v$, quaisquer que sejam $u, v, w \in K$.

CONSEQUÊNCIAS IMEDIATAS

1. Unicidade do elemento neutro aditivo 0.

De fato, suponhamos que existe outro elemento de K, digamos, 0′, para o qual 0′ + u = u.

Utilizando a equivalência anterior, $u = 0' + u \Leftrightarrow u - u = 0'$. Mas u – u = 0 por definição de elemento neutro! Segue então que 0 = u – u = 0′, ou seja, 0 = 0′.

2. Unicidade do elemento simétrico

(Exercício)

3. Lei do Corte: Sejam u, v, w elementos de K para os quais u +v = u + w. Então v = w.

(Exercício)

Assim, as regras para adição e subtração que utilizamos normalmente quando trabalhamos com números reais são válidas (na verdade, válidas para qualquer corpo).

2.2 DEFINIÇÃO DA DIVISÃO

Utilizando a propriedade de comutatividade da multiplicação para os elementos de um corpo, podemos afirmar que, $v \cdot 1 = 1 \cdot v = v$ para todo elemento v de K e que $v \cdot v^{-1} = v^{-1} \cdot v = 1$ qualquer que seja v de K não nulo. Assim, podemos definir a divisão de elementos de K da seguinte forma:

$$/ : K \times K^* \to K$$
$$(u, v) \mapsto u / v, \text{ onde } u / v = u \cdot v^{-1}$$

UNI

Em Teoria dos Conjuntos, a notação '*' acompanhada de um conjunto numérico quer dizer que o elemento neutro da adição, no caso, 0, não está incluso no conjunto. Em outras palavras, K* = K \ {0}.

Assim, dados u, v elementos de K, v não nulo, existe w em K tal que u/v = w. Multiplicando então v de ambos os lados da igualdade, temos que

$$(u / v) \cdot v = w \cdot v$$
$$(u \cdot v^{-1}) \cdot v = w \cdot v$$
$$u \cdot \underbrace{(v^{-1} \cdot v)}_{1} = w \cdot v$$
$$u \cdot 1 = w \cdot v$$
$$u = w \cdot v$$

$u = 0' + u \Leftrightarrow u - u = 0'$
u, v, w $\in$ K, (u · v)· w = u
·(v · w)

Resumindo, u / v = w $\Leftrightarrow$ u = w · v, quaisquer que sejam u, v, w $\in$ K, v $\neq$ 0.

CONSEQUÊNCIAS IMEDIATAS

1. Lei do Corte: Sejam u, v, w elementos de K, v não nulo, para os quais u · v = w · v. Então u = w.
De fato, como u · v = w · v e v é um elemento não nulo, existe v^{-1} em K. Multiplicando v^{-1} em ambos os lados da igualdade, segue que

$$(u \cdot v) \cdot v^{-1} = (w \cdot v) \cdot v^{-1}$$
$$u \cdot (v \cdot v^{-1}) = w \cdot (v \cdot v^{-1})$$
$$u \cdot 1 = w \cdot 1$$
$$u = w.$$

2. Unicidade do elemento neutro da multiplicação 1.
De fato, suponhamos que existe outro elemento de K, digamos, 1', para o qual v · v^{-1} = 1'. Isto significa que v/v = 1'. Utilizando a equivalência anterior, v/v = 1' $\Leftrightarrow$ v · 1' = v. Mas por definição, v · 1 = v. Logo, v · 1' = v · 1 e, pela Lei do Corte, 1'= 1.

3. Unicidade do elemento inverso multiplicativo.
(Exercício)

Já analisamos separadamente as propriedades da adição e da multiplicação associadas a um corpo K. Através destas operações, conseguimos definir as operações que nos faltavam – a subtração e a divisão – e a unicidade dos elementos neutros e dos inversos aditivo e multiplicativo. A última propriedade de corpo que precisamos analisar é a distributividade.

2.3 A DITRIBUTIVIDADE E SUAS CONSEQUÊNCIAS

A distributividade, juntamente com a comutatividade da multiplicação, nos garante que dados u, v, w elementos de K,

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$
$$(v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u$$

A primeira grande contribuição da distributividade é nos garantir que, dado qualquer elemento não nulo u pertencente a K, $u \cdot 0 = 0$.

De fato, seja u de K, não nulo. Então $u \cdot 0 + u = u \cdot 0 + u \cdot 1 = u \cdot (0 + 1) = u \cdot 1 = 0 + u$, ou seja, $u \cdot 0 + u = 0 + u$. Segue pela Lei do Corte que $u \cdot 0 = 0$.

Outra grande contribuição da distributividade, diz respeito às regras de sinais. Afinal, por que para u, v, w números reais não nulos, valem as igualdades $u \cdot v = (-u) \cdot (-v)$ e $(-u) \cdot v = u \cdot (-v)$?

Quando aprendemos estas regras no Ensino Fundamental, geralmente utilizamos a reta real e a noção de contagem associada à multiplicação de números inteiros. Vamos generalizar esta noção agora para um corpo K, utilizando a propriedade distributiva.

Sejam u e v dois elementos do corpo K, observe que

$$\begin{cases} (-u) \cdot v + u \cdot v = (-u + u) \cdot v = 0 \cdot v = 0 \\ u \cdot (-v) + u \cdot v = u \cdot (-v + v) = u \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Isto significa que $(-u) \cdot v$ é o elemento simétrico de $u \cdot v$, ou seja, $(-u) \cdot v = -(u \cdot v)$. Do mesmo modo $(-u) \cdot v$ é o elemento simétrico de $u \cdot v$, ou seja, que $u \cdot (-v) = -(u \cdot v)$. Como o elemento inverso é único, $(-u) \cdot v = u \cdot (-v)$.

Agora, voltemos a uma etapa anterior:

$u \cdot (-v) = -(u \cdot v)$

Trocando u por – u, temos que (-u) · (-v) = -[(-u) · v].

Também (-u) · v = -(u · v).

Repetindo o argumento e trocando v por –v, segue que

$$(-u)\cdot(-v) = -\underbrace{\left[u\cdot(-v)\right]} = -\left[-(u\cdot v)\right]$$

Agora, por definição, -[-(u · v)] + [-(u · v)] = 0, assim como (u · v) + [-(u · v)] = 0 . Pela unicidade do elemento neutro, (u · v) = -[-(u · v)] e (-u) · (-v) = -[-(u · v)] = u · v. Demonstradas, pois, as regras de sinais para a multiplicação. Mais: demonstradas para qualquer corpo K!

Por exemplo, o conjunto Q de todos os números racionais $\left(\left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in Z,\ q \neq 0\right\}\right)$ munido das operações adição e multiplicação a seguir:

Dados $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in Q$, $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$ e $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$.

Neste corpo (Q, +, .), o simétrico de um número racional não nulo qualquer $\frac{p}{q}$ é dado por $\frac{-p}{q}$ e o inverso multiplicativo por $\frac{q}{p}$ (desde que p também não seja nulo). Finalmente, o elemento neutro deste conjunto é $\frac{0}{q}$, qualquer que seja q não nulo.

UNI

Você pode encontrar mais exemplos de corpos em livros de Álgebra, ou mesmo no livro Curso de Análise, de Elon Lages Lima, cuja referência completa você encontra nas referências deste Caderno de Estudos.

Vamos agora dar mais um passo em direção às propriedades dos números reais, abordando o conceito de Corpo Ordenado.

3 CORPO ORDENADO

Dizer que um corpo K é ordenado é o mesmo que dizer que existe uma ordem entre seus elementos, ou seja, é possível ordená-los. Para entender o que de fato significa esta ordem, precisamos garantir que exista um subconjunto próprio P de K não vazio, que chamaremos de conjunto dos elementos positivos, e no qual valham as seguintes propriedades:

(a) A soma de quaisquer dois elementos positivos e a multiplicação de quaisquer dois elementos positivos permanece positiva.
(b) Dado um elemento qualquer u pertencente a K, uma das três alternativas a seguir é verdadeira: ou u = 0, ou u pertence a P, ou – u não pertence a P.

O conjunto dado por todos os elementos não nulos que não pertencem a P é chamado de conjunto dos números negativos E. Note que pela propriedade (b) P e E são conjuntos disjuntos, e K pode ser reescrito como $K = P \cup \{0\} \cup E$.

Outra observação importante é que, qualquer que seja u não nulo pertencente a K, u^2 pertence a P. Assim, o elemento 1 obrigatoriamente pertence a P, pois $1 = 1 \cdot 1$, e, portanto, -1 pertence a E, ou seja, -1 não é quadrado de nenhum elemento de K.

Note que, automaticamente, identificamos K como o conjunto de números reais e pensamos em P como sendo o conjunto de reais positivos. Mas existem outros corpos ordenados, como, por exemplo, o próprio Q. Para este corpo, o conjunto P seria dado por todos os números racionais $\frac{p}{q}$ tais que p e q são números naturais.

UNI

Na introdução deste tópico, foi dito que R é o único corpo ordenado a menos de isomorfirmo. Agora, afirmamos que Q é um corpo ordenado. Isso significa que existe um isomorfirmo entre R e Q, ou seja, R e Q são isomorfos. Assim, R é isomorfo a um subconjunto próprio seu. Incrível, não é?

3.1 DEFINIÇÃO DE ORDEM

Dado K um corpo ordenado, existe uma relação de ordem entre seus elementos. Esta relação é análoga a que foi definida quando estudamos os números naturais na unidade anterior.

DEFINIÇÃO 3.1.2: Dados dois elementos de um corpo ordenado K, u e v, dizemos que u é menor do que v se existe algum número natural w para o qual v = u + w. Neste caso, escrevemos
u < v. Neste caso, dizemos também que v é maior do que u, e escrevemos v > u.

Observe que, baseado em tudo o que vimos até agora, dizer que u é menor do que v é o mesmo que dizer que v – u pertence ao conjunto dos elementos positivos de K, P. Além disso, é possível mostrar que todas as propriedades que valiam para a relação de ordem definida sobre o conjunto dos números naturais (que não é um corpo!), valem para um corpo ordenado.

PROPOSIÇÃO 3.1.1 (Transitividade): Se u, v e w são três elementos de um corpo ordenado K tais que $u < v$ e $v < w$, então $u < w$.

PROPOSIÇÃO 3.1.2 (Tricotomia): Dados dois elementos u e v pertencentes a um corpo ordenado K, uma e apenas uma das afirmações a seguir ocorre:
(i) $u = v$;
(ii) $u < v$;
(iii) $v > u$.

PROPOSIÇÃO 3.1.3 (Monotonicidade da adição): Sejam u e v dois elementos de um corpo ordenado K tais que $u < v$. Então, para todo $w \in K$, $u + w < v + w$.

As demonstrações destes resultados necessariamente devem passar pelo conjunto dos elementos positivos de K, P. Deixamos como exercícios, e vamos enunciar a mais uma propriedade da relação de ordem definida sobre um corpo K que não era válida para os números naturais. Trata-se da monotonicidade da multiplicação.

PROPOSIÇÃO 3.1.4 (Monotonicidade da multiplicação): Sejam u e v dois elementos de um corpo ordenado K tais que $u < v$ e consideremos $w \in K$ um elemento qualquer. Se $w > 0$, então, $u \cdot w < v \cdot w$; por outro lado, se $w <0$, então $u \cdot w > v \cdot w$.

Demonstração:

Sejam u e v dois elementos de um corpo ordenado K tais que $u < v$ e consideremos $w \in K$ um elemento qualquer. Vamos supor inicialmente que $w > 0$, isto é, que $w \in P$.

Como $u < v$, segue que $v – u$ pertence a P. Logo, pela propriedade distributiva e pela definição de P, temos que $v \cdot w - u \cdot w = (v - u) \cdot w$ pertence a P, isto é, $u \cdot w < v \cdot w$.

Suponhamos agora que $w < 0$. Isto significa que $–w$ pertence a P, e que $(v - u) \cdot (-w)$ é elemento de P. Agora

$$\begin{aligned}(v-u)\cdot(-w) &= (-u+v)\cdot(-w)\\ &= [-(u-v)]\cdot(-w)\\ &= (u-v)\cdot w\\ &= u\cdot w - v\cdot w\end{aligned}$$

Ou seja, $u \cdot w -v \cdot w$ pertence a P e, portanto, $v \cdot w < u \cdot w$, CQD.

Na demonstração anterior, mostrar que (-v + u) = -(v - u) é um exercício fácil. Tente provar esta igualdade, utilizando a definição de elemento simétrico.

Destas propriedades elementares, podemos concluir mais alguns resultados que podem ser vistos como generalizações das proposições anteriores. Vamos demonstrá-los a seguir:

PROPOSIÇÃO 3.1.5: Sejam u, v, w e k elementos de um corpo ordenado K tais que u < v e w < k. Então u + w < v + k.

Demonstração:

Se u, v, w e k são tais que u < v e w < k, então v – u e k – w pertencem a P. Logo, por definição de corpo ordenado, (v – u) + (k – w) também pertence a P. Agora,

(v – u) +(k – w) = v + k – u – w = (v + k) – (u + w). Ou seja, (v + k) – (u + w) pertence a P e, portanto, u + w < v + w, CQD.

PROPOSIÇÃO 3.1.6: Sejam u, v, w e k elementos de um corpo ordenado K tais que 0 < u < v e 0 < w < k. Então u · w < v · k.

Demonstração:

Se u, v, w e k são tais que 0 < u < v e 0 < w < k, então u, v, (v – u), w, k e (k – w) pertencem todos a P. Agora,

$$\begin{aligned} v \cdot k - u \cdot w &= v \cdot k + \left(-u \cdot k + u \cdot k\right) - u \cdot w \\ &= \left(v \cdot k - u \cdot k\right) + \left(u \cdot k - u \cdot w\right) \\ &= (v - u) \cdot k + u \cdot (k - w) \in P \end{aligned}$$

Portanto, u · w < v · k, CQD.

PROPOSIÇÃO 3.1.7: Sejam u e v elementos de um corpo ordenado K tais que 0 < u < v. Então $v^{-1} < u^{-1}$.

Demonstração:

Sejam u e v elementos de um corpo ordenado K tais que 0 < u < v. Como o quadrado de qualquer elemento de K pertence a P e u pertence a P, segue que

$$\begin{aligned} u^{-1} &= u^{-1} \cdot 1 \\ &= u^{-1} \cdot \left(u \cdot u^{-1}\right) \\ &= u \cdot \left(u^{-1} \cdot u^{-1}\right) \\ &= u \cdot \left(u^{-1}\right)^2 \in P \end{aligned}$$

Do mesmo modo, $v^{-1} = v \cdot (v^{-1})^2 \in P$

Por outro lado, v – u também pertence a P, assim como, $(v - u) \cdot (u^{-1} \cdot v^{-1})$. Agora

$$\begin{aligned} (v-u)\cdot\left(u^{-1}\cdot v^{-1}\right) &= v\cdot\left(u^{-1}\cdot v^{-1}\right) - u\cdot\left(u^{-1}\cdot v^{-1}\right) \\ &= u^{-1}\cdot\left(v\cdot v^{-1}\right) - \left(u\cdot u^{-1}\right)\cdot v^{-1} \\ &= u^{-1}\cdot 1 - 1\cdot v^{-1} \\ &= u^{-1} - v^{-1} \end{aligned}$$

Logo $(u^{-1} \cdot 1 - 1 \cdot v^{-1}) \in P$. Segue que $v^{-1} < u^{-1}$, CQD.

Assim como fizemos quando estudamos os números naturais, aqui também podemos utilizar o símbolo matemático que transforma as três possibilidades da tricotomia em apenas duas, pois agrega a ele a possibilidade da igualdade. Neste caso, dados dois elementos u e v de um corpo ordenado K, ou $u \leq v$ (u menor ou igual a v) ou $u \geq v$ (u maior ou igual a v). Com exceção da tricotomia (que agora passa a ter apenas duas opções), todas as outras propriedades vistas ficam inalteradas se trocarmos o símbolo de 'menor que' pelo símbolo de 'menor ou igual a'.

Conforme já mencionamos anteriormente, em um corpo ordenado K, o elemento 1 pertence a P e, portanto, é considerado positivo, isto é, $1 > 0$. Isso significa que $1 < 1+1 < 1+1+1 < \dots$ Este simples fato nos mostra que o conjunto dos números naturais pode ser considerado como um subconjunto de K, não importando quem seja K. Em outras palavras, o conjunto **N** está imerso em K, o que nos garante que qualquer corpo ordenado K é necessariamente infinito.

Note que o fato de 1 ser um número positivo nos garante também que, na verdade, o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto de elementos positivos de K, P. Consideremos agora o conjunto formado por todos os números naturais n, acrescido dos números simétricos (- n) e do elemento neutro da adição, 0 (podemos considerar todos estes elementos, pois sabemos que eles pertencem a K e, portanto, existem). Vamos chamar este novo conjunto de **Z**: o conjunto dos números inteiros. Assim, temos que $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset K$.

Vamos agora definir mais um conjunto: consideremos todos os elementos da forma $m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n} \in K$, tais que m, n pertencem a **Z** e n é não nulo. Vamos chamar este conjunto de conjunto dos números racionais e denotá-lo por **Q**. Novamente, temos $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset K$.

Note que ainda não estamos trabalhando com os números reais, mas com um corpo ordenado qualquer! Vamos estudar mais algumas propriedades que valem para K antes de definirmos propriamente o conjunto dos números reais.

PROPOSIÇÃO 3.1.8 (Desigualdade de Bernoulli) Seja K um corpo ordenado e consideremos u um elemento de K tal que $u \geq -1$. Então $(1+u)^n \geq 1 + n \cdot u$, qualquer que seja $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$.

Demonstração:

Esta demonstração é feita através do método de indução finita em n.

Para $n = 1$, a propriedade é satisfeita, pois $(1+u)^1 \geq 1 + 1 \cdot u$.

Suponhamos agora que ela seja válida para $n = k$, isto é, $(1+u)^k \geq 1 + k \cdot u$, e vamos prová-la para $n = k+1$.

$$
\begin{aligned}
(1+u)^{k+1} &= (1+u)^k \cdot (1+u) \\
&\geq (1+k\cdot u)\cdot(1+u) \\
&= (1+k\cdot u) + u\cdot(1+k\cdot u) \\
&= 1 + k\cdot u + u + k\cdot u^2 \\
&= 1 + u\cdot(k+1) + k\cdot u^2 \\
&\geq 1 + (k+1)\cdot u
\end{aligned}
$$

Como k foi escolhido aleatoriamente, segue que $(1+u)^n \geq 1 + n \cdot u$, qualquer que seja $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$**,** CQD.

3.2 VALOR ABSOLUTO

Vamos agora definir valor absoluto em um corpo ordenado K. A ideia do valor absoluto é nos fornecer uma medida que era imediata quando estudamos os números naturais: lá, o Princípio da Boa Ordenação valia, agora, não vale mais. A noção de valor absoluto é extremamente importante no estudo da Matemática. Você deve se lembrar de já ter trabalhado um pouco com esta definição em Cálculo, ou mesmo Álgebra, mas em Análise, ela é vital.

Já recordamos a definição no Tópico 1 deste Caderno de Estudos, mas vamos repeti-la agora, juntamente com algumas de suas propriedades, mesmo as que já foram demonstradas ou deixadas como exercício na Unidade 1, para que nossa teoria fique consistente.

DEFINIÇÃO 3.1.4 Sejam K um corpo ordenado e u um elemento qualquer de K. Definimos o valor absoluto de u, $|u|$, como sendo

$$\begin{cases} |u| = u, & \text{se} \quad u > 0 \\ |0| = 0 \\ |u| = -u, & \text{se} \quad u < 0 \end{cases}$$

A primeira propriedade importante do valor absoluto segue:

PROPOSIÇÃO 3.1.9 Qualquer que seja u o elemento de um corpo ordenado K, temos $-|u| \leq u \leq |u|$.

Demonstração:

Seja u um elemento não nulo qualquer de K se u for positivo, $|u| = u$. Por outro lado, se u for negativo, (-u) é positivo e, portanto, $u < -u = |u|$. Segue que, em ambos os casos, $u \leq |u|$. Assim, $|u| - u \geq 0$ e $-(|u| - u) = -|u|-(- u) = -|u| + u \leq 0$, ou seja, $-|u| \leq u$. Portanto, se u for não nulo, $-|u| \leq u \leq |u|$.

Se $u = 0$, então $-|u| = u = |u|= 0$.

Portanto, $-|u| \leq u \leq |u|$, CQD.

Como consequência desta proposição, temos o seguinte teorema:

TEOREMA 3.1.1 Seja K um corpo ordenado e consideremos u, v dois elementos quaisquer de K. Então as afirmações a seguir são equivalentes:
(a) $-u \leq v \leq u$
(b) $v \leq u$ e $-v \leq u$
(c) $|v| \leq u$

Demonstração:

Vamos mostrar inicialmente que (a) implica (b).

Suponhamos que $-u \leq v \leq u$. Então, claramente $v \leq u$. Por outro lado, $-u \leq v$, o que significa que $v - (-u) \geq 0$. Agora $v - (-u) = v + u = u + v = u - (-v) \geq 0$. Segue que $-v \leq u$.

Mostrando que (b) implica (c).

Suponhamos que $v \leq u$ e $-v \leq u$. Como $|v|$ só pode assumir um dos dois valores, v ou – v, segue que obrigatoriamente $|v| \leq u$.
(c) implica (a)

Suponhamos por fim que $|v| \leq u$. Não sabemos se v é positivo ou negativo, apenas que, em ambos os casos, $|v| \leq u$ (não foi posta qualquer restrição ao valor de v). Portanto, $v \leq u$ e $-v \leq u$. Por outro lado, se $-v \leq u$, $u - (-v) = u + v = v + u = v - (-u) \geq 0$. Segue que $-u \leq v$ e, juntando as duas desigualdades, temos que $-u \leq v \leq u$.

COROLÁRIO 3.1.1 Dados u, v, w elementos de um corpo ordenado K, $|v - u| \leq w$ se, e somente se, $u - w \leq v \leq w + u$.

Demonstração: Exercício.

Mencionamos há pouco a importância da definição de valor absoluto no estudo da Análise. Normalmente, a propriedade anterior é amplamente utilizada no estudo de limites e funções contínuas, utilizando-se no lugar do w a letra grega ε (épsilon), que expressa uma quantidade muito pequena. Observe:

$$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-a < \varepsilon \Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon.$$

Voltaremos a esta notação ainda nesta Unidade, quando tratarmos de Topologia na Reta. Finalmente, enunciaremos as últimas propriedades de valor absoluto.

TEOREMA 3.1.2 Dados u, v w elementos quaisquer de um corpo ordenado K, valem as seguintes propriedades:

(a) $|u + v| \leq |u| + |v|$

(b) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$

(c) $|u| - |v| \leq |u| - |v| \leq |u - v|$

(d) $|u - w| \leq |u - v| + |v - w|$

Demonstração:

(a) Demonstrado na Unidade 1.

(b) Exercício.

(c) Claramente, $|u| - |v| \leq |u| - |v|$, uma vez que $|u| - |v| = |u| - |v|$ ou $|u| - |v| = -(|u| - |v|)$. Vamos então nos concentrar na desigualdade $|u| - |v| \leq |u - v|$.

Como podemos escrever $u = u - v + v$, da desigualdade (a), podemos concluir que $|u| = |(u - v) + v| \leq |u - v| + |v|$, ou seja, $|u| - |v| \leq |u - v|$. Repetindo o argumento para v, temos que $|u| - |v| \leq |u - v|$, isto é, $-(|u| - |v|) \leq |v - u|$. Por outro lado, $|v - u| \leq |u - v|$. Assim, temos simultaneamente $|u| - |v| \leq |u - v|$ e $-(|u| - |v|) \leq |u - v|$. Segue do TEOREMA 3.1.1 que $|u| - |v| \leq |u - v|$, como queríamos demonstrar.

(d) Exercício.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico, estudamos detalhadamente os corpos ordenados.

- Relembramos a definição de corpo que estudamos em Álgebra.

- A partir das operações binárias definidas sobre um corpo K, definimos a subtração e o quociente entre dois elementos.

- Vimos que as propriedades de corpo valem para o conjunto dos números reais.

- Entendemos a regra de sinais da multiplicação a partir das propriedades de corpo.

- Introduzimos o conceito de corpo ordenado, definindo o subconjunto de elementos positivos.

- Vimos que o quadrado de qualquer elemento do corpo ordenado é positivo, que 1 é positivo e que -1 é não positivo (e, portanto, negativo).

- Definimos a relação de ordem sobre o corpo ordenado e estudamos suas características.

- Definimos valor absoluto sobre o corpo ordenado e estudamos suas características.

AUTOATIVIDADE

Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico resolvendo alguns exercícios.

1 Seja K um corpo. Mostre que, para cada elemento v de K, o inverso aditivo – v é único.
(Dica: suponha que exista outro).

2 Sendo K um corpo, mostre que o elemento inverso multiplicativo é único.

3 Seja K um corpo e consideremos P o conjunto dos números positivos. Mostre que, dado qualquer elemento u não nulo pertencente a K, u^2 pertence a P.

4 Dados a, b, x elementos de um corpo ordenado K, mostre que $|x - a| \leq b$ se, e somente se, $a - b \leq x \leq a + b$.
(Dica: Utilize o TEOREMA 3.1.1).

5 Prove que, $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$, quaisquer que sejam u e v elementos de um corpo ordenado K. (Dica: estude o quadrado do módulo).

6 Prove que, $|u - v| \leq |u - w| + |w - v|$, quaisquer que sejam u, v e w elementos de um corpo ordenado K.

UNIDADE 3

TÓPICO 2

O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior, estudamos o conceito de corpo ordenado e boa parte de suas particularidades. Em muitas situações, fizemos analogia com propriedades que já conhecemos dos números reais. Isso não acontece por acaso: esta analogia é possível simplesmente porque o conjunto dos números naturais munido das operações de adição e multiplicação usuais e da relação de ordem que conhecemos é um corpo ordenado. Este fato faz com que boa parte das suas características seja herdada. Mais: deste fato também segue que o conjunto dos números naturais é um subconjunto próprio do conjunto de números reais. Também os conjuntos dos números racionais e dos números irracionais são subconjuntos próprios do conjunto dos números reais.

Na verdade, o conjunto dos números reais é o único corpo ordenado, a menos de isomorfirmo. Interessante, não é? Não demonstraremos aqui a unicidade presente nesta afirmação, por fugir do escopo deste livro, mas vamos agora fazer a transição do universo dos corpos para adentrar nas propriedades dos números reais.

Seguindo a nomenclatura já adotada no tópico anterior, toda vez que introduzirmos a letra K, estaremos nos referindo a um corpo ordenado.

2 COTAS INFERIOR E SUPERIOR, MÁXIMO E MÍNIMO

Já vimos que os elementos de um corpo ordenado podem ser comparados dois a dois. Em outras palavras, dados dois elementos u e v de um corpo ordenado K, necessariamente um deles é menor ou igual ao outro, por exemplo, u pode ser menor ou igual a v. Particularmente, é possível encontrar um terceiro elemento w em K tal que w seja maior do que u e menor do que v: mais: w não necessariamente é único (na verdade, não é!), podem existir infinitos elementos entre u e v, desde que u não seja igual a v. a definição a seguir, generaliza esta discussão. Observe:

DEFINIÇÃO 3.2.1 Seja K um corpo ordenado e consideremos u, v dois elementos de K tais que $u < v$. Definiremos então os seguintes conjuntos:
(a) O intervalo fechado $[u, v]$ como sendo o conjunto de todos os elementos de K maiores ou iguais a u e menores ou iguais a v: $[u, v] = \{w \in K | u \leq w \text{ e } w \leq v\}$.
(b) O intervalo aberto (u, v) como sendo o conjunto de todos os elementos de K maiores do que u e menores do que v: $(u, v) = \{w \in K | u < w \text{ e } w < v\}$.
(c) O intervalo aberto em u e fechado em v como sendo o conjunto de todos os elementos de K maiores do que u e menores ou iguais a v: $[u, v] = \{w \in K | u < w \text{ e } w \leq v\}$.
(d) O intervalo fechado em u e aberto em v como sendo o conjunto de todos os elementos de K maiores ou iguais a u e menores que v: $[u, v] = \{w \in K | u \leq w \text{ e } w < v\}$
(e) A semirreta fechada à esquerda em u como sendo o conjunto de todos os elementos de K menores ou iguais a u: $(-\infty, u) = \{w \in K | w \leq u\}$.
(f) A semirreta aberta à esquerda em u como sendo o conjunto de todos os elementos de K menores do que u: $(-\infty, u) = \{w \in K | w < u\}$.
(g) A semirreta à fechada direita de v como sendo o conjunto de todos os elementos maiores ou iguais a v: $(v, +\infty) = \{w \in K | w \geq u\}$.
(h) A semirreta aberta à direita de v como sendo o conjunto de todos os elementos maiores que v: $(v, +\infty) = \{w \in K | w > u\}$.

OBS: Quando $a = b$, dizemos que o intervalo $[a,b] = \{a\} = \{b\}$ é degenerado.

Observe que os conjuntos definidos de (a) a (d) são limitados, pois existem elementos de K que limitam estes conjuntos tanto inferiormente como superiormente. Já os intervalos definidos de (e) a (h) são apenas limitados superiormente ou inferiormente, e, portanto, podem ser ditos ilimitados. Vamos definir o que significa exatamente ser limitado inferiormente e superiormente:

DEFINIÇÃO 3.2.2 Dizemos que um subconjunto X de um corpo ordenado K é limitado inferiormente quando existe um elemento u pertencente a K que é menor ou igual a qualquer elemento de X ($u \leq x$ para todo x de X); em outras palavras, $X \subset [u, +\infty]$. Este elemento u é chamado de cota inferior de X. Analogamente, dizemos que X é limitado superiormente se existe um elemento v pertencente a K que é maior ou igual a qualquer elemento de X ($x \leq v$, para todo x de X); em outras palavras, $X \subset [-\infty, v]$. Neste caso, v é chamado de cota superior de X.

Quando estudamos os conceitos de conjunto limitado e conjunto finito sobre os números naturais, vimos que estas definições se confundiam, parecendo essencialmente iguais: no conjunto dos números naturais, um subconjunto limitado necessariamente é finito e um subconjunto ilimitado é um subconjunto infinito. Agora, no estudo de um corpo ordenado, estas definições são distintas. Note que o intervalo fechado definido em (a) é limitado inferiormente por u e superiormente por v. Entretanto, este mesmo conjunto é infinito. Vamos mostrar esta afirmação:

Se u e v são elementos distintos de K tais que u < v, então v – u pertence ao conjunto dos elementos positivos de K, P. Agora, note que,

$$\begin{aligned}\frac{u+v}{2}-u &= \frac{u}{2}+\frac{v}{2}-u\\ &= \frac{v}{2}-\frac{u}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot(v-u)\in P\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}v-\left(\frac{u+v}{2}\right) &= v-\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\\ &= \frac{v}{2}-\frac{u}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot(v-u)\in P\end{aligned}$$

Logo, $u<\frac{u+v}{2}<v$

Então podemos afirmar que existe um elemento de K, que chamaremos de w_1, tal que u < w_1 < v: basta tomar $w_1=\frac{u+v}{2}$. Assim, existe um elemento $w_2=\frac{u+w_1}{2}$ tal que u < w_2 < w_1 < v.

Novamente, podemos encontrar um elemento $w_3=\frac{u+w_2}{2}$ tal que u < w_3 < w_2 < w_1 < v, e assim por diante. Ou seja, u < ... < w_3 < w_2 < w_1 < v. Portanto, existem infinitos elementos w_n tais que u < w_n < v. Segue que (u, v) é infinito. Como (u, v) $\subset$ [u, v], segue que [u, v] também é infinito.

UNI

Resumindo: um subconjunto limitado de um corpo ordenado K não necessariamente é finito.

Outros dois conceitos que já vimos na unidade anterior, mas no contexto dos números naturais, são as definições de elementos mínimo e máximo de um conjunto.

Voltemos aos intervalos definidos em (a) e (b) na DEFINIÇÃO 3.2.1 para analisarmos neste novo contexto. Note que o intervalo definido em (a), [u, v], possui um elemento que é menor do que todos os outros e um elemento que é maior do que todos os outros do intervalo. De fato, pela própria definição de [u, v] u é o menor elemento enquanto v é o maior elemento do intervalo. Dizemos então que u é o mínimo de [u, v] e v é o elemento máximo de [u, v]. Para este intervalo, o elemento mínimo é uma cota inferior do intervalo, enquanto o elemento máximo é cota superior.

Analisemos agora o intervalo definido em (b), (u, v). Neste caso, temos u como cota inferior do intervalo, mas não como elemento mínimo, uma vez que u não pertence a (u, v). A mesma análise pode ser feita com relação a v: v é cota superior, mas não é elemento máximo.

DEFINIÇÃO 3.2.3 Dado X um subconjunto de K, dizemos que X possui elemento mínimo quando existe $u \in X$ tal que $u \leq x$ para todo x pertencente a X. Analogamente, dizemos que X possui elemento máximo quando existe um elemento v em X tal que $x \leq v$ qualquer que seja x elemento de X.

Assim, se X possuir um elemento mínimo u, ele automaticamente é cota inferior de X, e se X possuir elemento máximo v, v automaticamente é cota superior de X.

Outra característica importante que os corpos ordenados possuem é que o Princípio da Boa Ordem visto na unidade anterior não é verdadeiro neste contexto. Este fato já fica claro quando consideramos o intervalo aberto (u, v) pertencente a K. Se repetirmos o argumento visto na página anterior (item b), fixando v ao invés de u, ficará bem claro que estaremos os aproximando cada vez mais de u, sem nunca alcançá-lo. Como u não pertence ao intervalo, (u, v) não possui um elemento mínimo (embora limitado inferiormente).

3 SUPREMO E ÍNFIMO

Acabamos de definir máximo e mínimo de um subconjunto qualquer X de K. Vimos que X seria considerado limitado inferiormente se existisse um elemento u em K (que poderia ou não pertencer a X) tal que, qualquer outro elemento de X seria maior do que u, e este elemento recebia o nome de cota inferior de X. Uma pergunta natural que poderia surgir é se este elemento é único. Vamos parar para analisar alguns exemplos no intuito de responder esta pergunta.

EXEMPLO 1: Consideremos o intervalo fechado [0, 1]. Claramente, este conjunto é limitado, em particular, limitado inferiormente pelo elemento 0, pois qualquer que seja x pertencente a [0, 1], temos que $0 \leq x$. Entretanto, observe que também temos $-1 \leq x$ para todo x pertencente a [0, 1]. Assim, embora -1 não pertença ao intervalo, ele satisfaz a definição de cota inferior também. Na verdade, podemos encontrar inúmeras cotas inferiores para este intervalo. Esta afirmação já responde à pergunta que fizemos: um conjunto limitado inferiormente tem infinitas cotas inferiores. A diferença do 0 em relação às outras cotas é que ele é o menor elemento do conjunto [0,1], isto é, é o elemento mínimo de [0, 1]. Assim, o elemento mínimo de um conjunto sempre será uma cota inferior do conjunto.

EXEMPLO 2: Vamos agora analisar o conjunto (0, 1]. Novamente, 0 é uma cota inferior do intervalo considerado, assim como -1, -1/2, -1/3 etc. Desta vez, 0 não pertence ao intervalo e, portanto, não é elemento mínimo – este intervalo não possui mínimo! Entretanto, ele continua sendo especial em relação às outras cotas inferiores, porque é a maior cota inferior do intervalo.

DEFINIÇÃO 3.2.3: Sejam K um corpo ordenado e X um subconjunto de K limitado inferiormente. Um elemento $u \in K$ é chamado de ínfimo de X se u for a maior das cotas inferiores de X. Neste caso, denotamos u = inf X.

Assim, de acordo com a definição e com os exemplos anteriores, inf [0, 1] = inf [0, 1] = 0.

A DEFINIÇÃO 3.2.1 tem como consequência direta a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3.2.1 Sejam K um corpo ordenado e X um subconjunto de K limitado inferiormente. Um elemento $u \in K$ será chamado de ínfimo de X se, e somente se, as duas propriedades a seguir forem satisfeitas:

(a) Para todo x pertencente a X, $u \leq x$.
(b) Se um elemento v de K for tal que $v \leq x$ para todo x em X, então $v \leq u$.

A condição (b) pode ser reescrita como:

(b′) Se um elemento v de K for tal que $u < v$, então existe um elemento x de X tal que $x < v$.

Observe que o ínfimo de um conjunto X é único.

De fato, suponhamos que u e u′ fossem ambos ínfimos de X. Como u e u′ são elementos de um corpo ordenado, ou u' < u ou u < u' ou ainda u = u'. Suponhamos que u' < u. Visto que u' = inf X, existe algum elemento y de X para o qual y ≤ u: contradição, pois u = inf X e, portanto, é menor ou igual a todo elemento de X. Logo, u' não pode ser menor do que u. Suponhamos então que u < u′. Neste caso, u é cota inferior de X, mas não é a maior delas: contradição, pois u = inf X. Portanto, u = u'.

OBSERVAÇÃO: Embora todos os elementos de K sejam cotas inferiores do conjunto vazio, ele não possui ínfimo.

O mesmo tratamento dado para a cota inferior de certo subconjunto X pode ser dado para suas cotas superiores.

EXEMPLO 3: Considere o seguinte subconjunto:

$$X = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots \right\}$$

Este conjunto pode ser reescrito como $X = \left\{ \frac{n+1}{n} \;\middle|\; n \in N \right\}$ e claramente é infinito. Por outro lado, ele é limitado superiormente por 2, uma vez que qualquer elemento de X será menor ou igual a 2. Assim, 2 é uma cota superior de X e seu elemento máximo.

EXEMPLO 4: O número 5 é cota superior do intervalo (-∞, 4), assim como 6, 7. Entretanto, a menor cota superior deste intervalo é o número 4.

DEFINIÇÃO 3.2.4: Sejam K um corpo ordenado e X um subconjunto de K limitado superiormente. Um elemento u ∈ K é chamado de supremo de X se u for a menor das cotas superiores de X. Neste caso, denotamos u = sup X.

Assim, de acordo com a definição, no exemplo 3, sup X = 2, e no exemplo 4, sub (-∞, 4) = 4.

PROPOSIÇÃO 3.2.2 Sejam K um corpo ordenado e X um subconjunto de K limitado superiormente. Um elemento u ∈ K será chamado de supremo de X se, e somente se, as duas propriedades a seguir forem satisfeitas:
(a) Para todo x pertencente a X, u ≥ x.
(b) Se um elemento v de K for tal que v ≥ x para todo x em X, então v ≥ u.

A condição (b) pode ser reescrita como:

(b′) Se um elemento v de K for tal que u > v, então existe um elemento x de X tal que x > v.

Assim como o ínfimo, o supremo de um conjunto X é único.

Observe que o ínfimo de um conjunto X é único.

Voltemos por alguns instantes ao Exemplo 3:

EXEMPLO 3: Note que os elementos do conjunto $X = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$ vão se tornando cada vez menores, mas como o numerador é maior do que o denominador para todos eles, todos os elementos de X serão maiores do que 1. Além do supremo 2, X também possui ínfimo: o elemento 1.

PROPOSIÇÃO 3.2.3 Todo subconjunto finito X de um corpo ordenado K possui ínfimo e supremo.

Demonstração:

Seja X um conjunto finito. Como X é subconjunto de um corpo ordenado, podemos escrevê-lo como sendo $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ para algum número natural n, de tal forma que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Assim, x_1 será o menor elemento de X e qualquer outro elemento $u \in K$ tal que $u \leq x$, com i = 1, 2, …, n, será tal que $u \leq x_1$. Logo x_1 = inf X. Do mesmo modo, x_n será o supremo de X, pois para qualquer $v \in K$ tal que $x_i \leq v$, i = 1, 2, n, teremos $x_n \leq v$. Segue que x_n = sup X. Portanto, X possui supremo e ínfimo.

Como consequência direta desta proposição temos que TODO CONJUNTO FINITO É LIMITADO.

No resultado anterior, afirmamos nas entrelinhas que um conjunto que possui ínfimo e supremo é limitado. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, isto é, existem conjuntos limitados que não possuem supremo ou ínfimo. Esta afirmação pode parecer estranha, mas depende exclusivamente do corpo onde estamos trabalhando. Vamos entender melhor o que estamos afirmando através de um exemplo:

EXEMPLO: consideremos o corpo ordenado **Q** dos números racionais e o subconjunto $X = \{x \in Q \mid x^2 < 2\}$. Claramente X é limitado: 2 e 3/2 são cotas superiores de X, por exemplo. Por outro lado, Já mostramos na Unidade 1 que não existe um número racional x para o qual valha $x^2 = 2$. Assim X, como subconjunto de Q, embora limitado não possui supremo.

Esse é o maior entrave que o conjunto **Q** apresenta em se tratando de Análise Matemática: alguns subconjuntos limitados de **Q** não possuem supremo (ou ínfimo). Felizmente, existem corpos onde isso não ocorre, isto é, onde todos os conjuntos limitados possuem supremo e ínfimo.

DEFINIÇÃO 3.2.5: Um corpo ordenado K é dito completo quando todo subconjunto não vazio de K limitado possui ínfimo e supremo. Em particular, todo subconjunto limitado inferiormente possui ínfimo e todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.

Estamos agora em condições de enunciar o Axioma Fundamental da Análise Matemática:

AXIOMA: Existe um corpo ordenado completo. Chamamos este corpo de conjunto dos números reais e o denotamos por **R**.

4 NÚMEROS REAIS

Por tudo o que vimos até agora, sabemos que o conjunto dos números reais **R** é um corpo ordenado completo. Assim, o conjunto limitado que tínhamos estudado anteriormente, $X = \{x \in Q \mid x^2 < 2\}$, que não possuía supremo em **Q**, possui em **R**: denotamos este número por $\sqrt{2}$. Assim, **Q** é um subconjunto próprio de **R**, isto é, existem elementos de **R** que não pertencem a **Q**. O conjunto formado por estes elementos é denotado por **I** e recebe o nome de conjunto dos números irracionais. Este conjunto é não vazio: acabamos de conhecer um dos elementos que pertence a ele e, assim, como este, existem vários outros. Mais do que isso: o conjunto dos números irracionais é infinito e está espalhado ao longo de **R** mais à frente, entenderemos o que esta afirmação significa. Por hora, vamos ver algumas consequências da completeza de **R**.

A primeira propriedade que iremos demonstrar é que **R** é um corpo arquimediano, isto é, que **R** satisfaz o teorema a seguir:

TEOREMA 3.2.1 As seguintes afirmações são válidas.

(a) O conjunto dos números naturais $N \subset R$ não é limitado superiormente

(b) Para $X = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in N \right\}$, inf X = 0.

(c) Dados a e b números reais positivos, existe um número natural n para o qual $n \cdot a > b$.

Demonstração:

(a) Suponhamos por absurdo que existisse um número real c tal que c = sup **N**. Então qualquer elemento menor do que c não seria cota superior de N: em particular c – 1. Assim, existiria um número natural n tal que n > c – 1 e, neste caso, n + 1 > c. Encontramos então um número natural n + 1 maior do que c: contradição, pois c foi considerado como sendo supremo de N. Portanto, **N** não possui supremo.

(b) Como os elementos de X são da forma 1/n, claramente, à medida que n cresce, 1/n vai ficando mais próximo de 0. Logo 0 é uma cota inferior de X. Precisamos, pois mostrar que 0 é a maior das cotas inferiores. Suponhamos que existe um número $c > 0$ tal que $c < 1/n$ para todo n natural. Então $n < 1/c$, para todo n natural, ou seja, 1/c é cota superior de N: contradição, pois (a) nos garante que N não possui conta superior. Portanto, não existe tal c e, assim, 0 é a maior das cotas inferiores de X, isto é, $0 = \inf X$.
(c) Sejam a e b dois números reais positivos. Como o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente, existe n em N tal que $n > b/a$ e, portanto, $n \cdot a > b$, CQD.

O próximo teorema que apresentaremos é conhecido como o Teorema dos Intervalos Encaixantes. Ele é imprescindível para mostrarmos que o conjunto dos números reais, ao contrário dos conjuntos de números naturais, inteiros e racionais, não é enumerável.

TEOREMA 3.2.2 (Teorema dos Intervalos Encaixantes) Dada uma sequência decrescente de intervalos reais limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$, qualquer que seja n natural.

Demonstração:

Dada uma sequência decrescente de intervalos reais limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$, para cada natural n, existem números reais a_n, b_n tais que $I_n = [a_n, b_n]$ e $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$. Assim o conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ é limitado superiormente (lembremos que R é completo!). Consideremos então c como sendo o supremo de A. Então $a_n \leq c$ para todo n natural. Por outro lado, para cada n, b_n é uma cota superior de A. Como c é a menor das cotas superiores, segue que $c \leq b_n$ para todo n. Assim, $a_n \leq c \leq b_n$ e, portanto, $c \in I_n$ para todo n natural, CQD.

TEOREMA 3.2.3 O conjunto dos números reais não é enumerável.

Demonstração:

Para mostrarmos que R é não enumerável, precisamos provar que não existe função $f: N \rightarrow R$ sobrejetora. Precisamos então construir um a sequência de intervalos encaixantes $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ tais que f(n) não pertença a I_n. Como sabemos que existe um número real c que pertence a todos estes intervalos, esta construção implicará $f(n) \neq c$ para todo n, ou seja, na não sobrejeção de f. Vamos ao trabalho!

Seja então $f: N \rightarrow R$ uma função qualquer, e consideremos dois números reais a_1 e b_1 para os quais $f(1) < a_1 < b_1$ (podemos supor isto, porque R não é limitado superiormente).

Assim, para n = 1, construímos o intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) \notin I_1$.

Suponhamos agora que, para n = k, tenhamos construído intervalos encaixantes $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k$ tais que $f(1) \notin I_k$ e vamos construir I_{k+1}.

Considerando f(k + 1), temos duas situações pra analisar:
(i) Se $f(k+1) \notin I_k$ podemos tomar $I_{k+1} = I_k$.
(ii), Se $f(k+1) \in I_k$, temos que $f(k+1) \neq a_k$ ou $f(k+1) \neq b_k$. Suponhamos sem perda de generalidade que $f(k+1) \neq a_k$. Então podemos construir o intervalo I_{k+1} como sendo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, onde $a_k = a_{k+1}$ e $b_{k+1} = \dfrac{(a_k + f(k+1))}{2}$.

Como k foi escolhido aleatoriamente, segue que a construção é válida para qualquer n natural.

Assim, construímos nossa sequência de intervalos encaixantes $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ tais que f(n) não pertença a I_n como queríamos.

Como corolário deste Teorema temos que todo intervalo não degenerado é não enumerável. Mais: todo intervalo real possui tanto números racionais como irracionais. Não demonstraremos estas propriedades aqui, mas você pode encontrá-las em [LIMA, 2004].

RESUMO DO TÓPICO 2

Vamos, a seguir, relembrar brevemente o que vimos neste tópico.

- Introduzimos o conceito de intervalo sobre um corpo ordenado.
- Definimos cotas superior e inferior.
- Observamos que, em corpos ordenados, os conceitos de finito e limitado diferem.
- Trabalhamos novamente com os conceitos de máximo e mínimo de um conjunto.
- Definimos supremo e ínfimo de um subconjunto.
- Aprendemos que nem todo subconjunto limitado de um corpo ordenado tem supremo e que, quando isto acontece, dizemos que o corpo é completo.
- Vimos que Q não é completo, mas R sim.
- Demonstramos que R é um conjunto não enumerável e que todos os intervalos de R não degenerados também são não enumeráveis.

AUTOATIVIDADE

Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico através de alguns exercícios.

1 Mostre que o supremo de um conjunto, quando existe, é único.

2 Prove que não existe número racional r tal que $r^2 = p$, onde p é um número primo.

3 Mostre que só existe um número real x positivo para o qual $x^2 = 2$.

4 Sejam A e B dois subconjuntos numéricos não vazios, tais que $A \subset B$. Prove que $\inf A \geq \inf B$ e que $\sup A \leq \sup B$.
(Dica: Utilize as proposições associadas às definições de ínfimo e supremo).

5 Dados dois conjuntos numéricos limitados A e B, definimos o conjunto $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Prove que $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$.
(Dica: para mostrar que $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$, é preciso mostrar que $\sup (A + B) \leq \sup A + \sup B$ e que $\sup (A + B) \geq \sup A + \sup B$).

TÓPICO 3

CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS

1 INTRODUÇÃO

Vamos agora adentrar no mundo da topologia. Mas o que é topologia, afinal? A pergunta correta a ser feita é o que são espaços topológicos? Espaços topológicos são conjuntos com determinadas propriedades sobre os quais definimos uma (agora, sim), topologia. Confuso, não é? Nosso intuito neste curso é apresentar alguns conceitos no âmbito dos números reais para que, no final desta unidade, possamos apresentar a definição de espaço topológico e, assim, dar a você uma ideia do que significa topologia. Na verdade, será natural aceitar que o conjunto dos números reais, munido de certa topologia é um espaço topológico.

Neste tópico, introduziremos os conceitos de conjuntos abertos e fechados. Você deve se perguntar se os intervalos abertos e fechados definidos do tópico anterior têm relação com estes conjuntos. A resposta é sim! Na verdade, os intervalos abertos são conjuntos abertos e os fechados são conjuntos fechados. Mas a noção de conjuntos abertos e fechados vai além! Na verdade, a definição pode ser estendida para o plano cartesiano R^2, para **C,** para o conjunto das funções contínuas, para o conjunto das funções integráveis e assim por diante. Aqui, vamos apenas nos restringir ao conjunto dos números reais, mas fazendo algumas modificações de nomenclatura: quando nos referirmos à reta real, estaremos falando do conjunto dos números reais; quando nos referirmos a ponto, estaremos falando de um número real.

2 CONJUNTOS ABERTOS

Consideremos o conjunto formado por todos os números reais maiores do que 1:

$$X = \{x \in R \mid x > 1\}$$

Sabemos que este conjunto possui um ínfimo – o número 1 – mas que este ínfimo não pertence a X. De fato, sempre que fixamos um elemento x de X, é possível encontrar um elemento y para o qual $x > y > 1$. Em outras palavras, para elemento x de X, é possível encontrar um número real $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira de tal forma que $x + \varepsilon > 1$. A mesma ideia vale para o intervalo (a, b), onde a e b são dois números reais quaisquer com $a < b$. Este conjunto é limitado inferior e superiormente por a e b respectivamente, mas para qualquer x pertencente ao intervalo, podemos encontrar um número real $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira de tal forma que $a < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < b$.

Esta ideia nos motiva a enunciar os conceitos de ponto interior a um dado conjunto X.

2.1 PONTOS INTERIORES

DEFINIÇÃO 3.3.1 Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que um elemento $x \in X$ é um ponto interior a X se é possível encontrar um número real $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$.

EXEMPLO: Note que em um conjunto (a, b), com $a<b$ números reais, qualquer ponto que possua a propriedade $a < x < b$ é um ponto interior, ou seja, todos os pontos do intervalo são pontos interiores. Entretanto, se considerarmos o conjunto (a, b], temos que o ponto b, embora pertença ao intervalo, não é ponto interior, pois qualquer que seja o número real $\varepsilon > 0$ escolhido, $(b + \varepsilon) \notin (a, b)$.

O exemplo anterior nos motiva a observar que nem todo ponto pertencente a um conjunto é um ponto interior. Assim, denotamos por int(X) o conjunto formado por todos os pontos interiores de um conjunto X e o chamamos de interior do conjunto X. Claramente, $\text{int}(X) \subset X$ e, se Y for um conjunto tal que $Y \subset X$, então $\text{int}(Y) \subset \text{int}(X)$.

EXEMPLO: Vimos que todos os pontos de (a, b) são pontos interiores. Logo int(a, b) = (a, b). Entretanto, existe um ponto do intervalo (a, b] que não é interior. Na verdade, ele é único, e int(a, b] = (a, b). Mais:
int(a, b) = int (a, b] = int [a, b) = int[a, b] = (a, b).

PROPOSIÇÃO 3.3.1: Dado X um conjunto de números reais, o interior de X, int(X), deve conter pelo menos um intervalo aberto.

Demonstração:
Segue diretamente da definição de ponto interior.

EXEMPLO: Consideremos um conjunto finito $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$. Observe que, independentemente do elemento x_i de X que escolhermos, não será possível encontrar um número positivo $\varepsilon > 0$ para o qual $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \subset X$. Assim, $\text{int}(X) = \varnothing$. Note que o fato do conjunto X ser finito fez a diferença, mas esta ideia pode ser estendida para outro tipo de conjunto. Na verdade,

PROPOSIÇÃO 3.3.2 Se X for um conjunto enumerável, então $\text{int}(X) = \varnothing$.

Demonstração:

Utilizaremos uma técnica que aprendemos durante o curso de Lógica Matemática: vamos negar a tese e concluir a negativa da hipótese.

Seja X tal que int (X) seja não vazio. Então, pela proposição anterior, existe um intervalo aberto (a, b) contido em X. Como vimos que todo intervalo aberto com $a < b$ é não enumerável, segue que (a, b) é não enumerável e, portanto, X é não inumerável também.

Assim, se int(X) for não vazio, X é não enumerável. Podemos então concluir que, se X for enumerável, o int(X) será vazio, CQD.

COROLÁRIO 3.3.1: Os conjuntos dos números naturais **N**, dos números inteiros **Z** e dos números racionais **Q** não possuem pontos interiores.

O fato de termos mostrado que os conjuntos enumeráveis têm interior vazio não significa dizer que os conjuntos não enumeráveis não os têm: o conjunto $I = R - Q$ é não enumerável e tem o interior vazio.

DEFINIÇÃO 3.3.2 Dizemos que um conjunto X é aberto se X = int(X).

Esta definição pode ser interpretada da seguinte maneira: X é aberto se, e somente se, para cada ponto x de X, é possível encontrar um número positivo $\varepsilon > 0$ de tal forma que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$. Claramente, este valor $\varepsilon > 0$ depende de x.

EXEMPLO: Vimos que int(a,b) = (a, b). Esta propriedade implica (a, b) ser um conjunto aberto, quaisquer que sejam a, b reais, com $a < b$. Já os conjuntos (a, b], [a, b) e [a, b] não são abertos.

EXEMPLO: Os conjuntos $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ são abertos em **R**.

PROPOSIÇÃO 3.3.4: O conjunto vazio é aberto.

Demonstração:

De fato, ele apenas não seria aberto se existisse algum ponto pertencente a ele que não estivesse no seu interior. Como não existe tal ponto, (afinal, estamos falando do conjunto vazio), segue que ele é aberto, CDQ.

PROPOSIÇÃO 3.3.5: Para subconjuntos de **R**, valem as seguintes propriedades:

(a) Se A e B são abertos, então a intersecção de A e B, $A \cap B$, também é aberto.
(b) Dada uma família de abertos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, a união $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração:

(a) Sejam A e B dois conjuntos abertos e consideremos x um elemento pertencente a $A \cap B$. Pela definição de interseção, x pertence a A e x pertence a B. Logo, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset B$. Consideremos então um número real positivo $\varepsilon > 0$ de tal forma que $\varepsilon < \varepsilon_1$ e $\varepsilon < \varepsilon_2$. Assim, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset B$ e, portanto, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A \cap B$. Como x foi escolhido como um elemento qualquer de $A \cap B$, segue que $A \cap B$ é aberto, CQD.
(b) Dada uma família de abertos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, consideremos x um elemento pertencente à união $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então, pela definição de união, $x \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ para o qual $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda$ e, portanto, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Como x foi escolhido como um elemento qualquer da união, segue que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto, CQD.

A proposição anterior é peça-chave para o seguinte teorema:

TEOREMA 3.3.1 Todo subconjunto aberto A de números reais pode ser escrito, de modo único, como uma união de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

Demonstração: A demonstração deste teorema é um pouco extensa e precisa ser dividida em três partes:

(i) Mostrar que A pode ser escrito como união de intervalos abertos dois a dois disjuntos.
(ii) Mostrar que esta união é enumerável.
(iii) Mostrar que é única.

Vamos começar com (i).

Seja x um elemento de A. Então existe pelo menos um intervalo aberto que contenha x e está contido em A. Consideremos I_x como sendo a união de todos os intervalos abertos que contém x e estão contidos em A. Pela proposição anterior, I_x é um subconjunto aberto que está contido em A. Mais: I_x é o maior intervalo aberto que contém x e está contido em A. Note também que, dados x, y elementos de A, ou $I_x = I_y$ ou $I_x \cup I_y = \varnothing$. De fato, se existisse algum elemento z em $I_x \cap I_y$, então z pertenceria a I_x e a I_y e, assim, $I_x \cup I_y$ seria um intervalo aberto contendo x e contendo y. Como I_x é o maior intervalo contendo x, $I_x \cup I_y \subset I_x$, isto é, $I_x \subset I_y$. Pelo mesmo argumento, $I_x \cup I_y \subset I_y$, ou seja, $I_x \subset I_y$. Assim, $I_x = I_y$. Portanto, $A = \bigcup I_x$.

(ii) Já mostramos então que A pode ser escrito como união de abertos disjuntos. Vamos mostrar que esta união é enumerável. Para isso, utilizaremos a enumerabilidade de Q.

Como cada intervalo I_x é um subconjunto de R. podemos escolher um número racional r pertencente a I_x (isso se deve a Q estar distribuído ao longo de R), que chamaremos de r_x. Note que a função que associa a cada I_x um número racional r_x é injetora, pois os intervalos I_x são dois a dois disjuntos. (se $r_x = r_y$, então $I_x \cap I_y$ não seria vazio, pois r_x pertenceria a interseção). Agora, o conjunto formado por todos os r_x é um subconjunto de Q e, portanto, enumerável. Assim, encontramos uma função injetora do conjunto formado por todos I_x em um conjunto enumerável: segue que o conjunto formado por todos os I_x também é enumerável, isto é, a união $A = \bigcup I_x$ é realmente enumerável.

(iii) Suponhamos que possamos escrever A também como uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos $\bigcup J_m$. Para cada m, podemos então escrever $J_m = (a_m, b_m)$. Observe que as extremidades destes intervalos a_m e b_m não pertencem a A. De fato, se, por exemplo, a_m pertencesse a A, como $a_m \notin (a_m, b_m)$, existiria algum $J_p = (a_p, b_p)$ contendo a_m. Assim, o aberto (a_p, b), onde b é o menor número entre b_p e b_m estaria contido tanto em J_m como em J_p, o que contradiria o fato deles serem disjuntos.

Assim, para cada m e para cada x pertencente a J_m, J_m é o maior intervalo que contém x e está contido em A, ou seja, $J_m = I_x$. Portanto, A pode ser escrito de uma única maneira como união enumerável, abertos dois a dois disjuntos, CQD.

A demonstração do teorema anterior foi trabalhosa, mas veja que importante resultado temos agora: qualquer aberto de R, não importa qual, vai poder ser escrito como união enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Pode parecer óbvia a primeira parte da afirmação, mas o fato de ser enumerável é surpreendente, não é?

Temos dois fatos que precisam ficar claros depois deste teorema.
Primeiro: o que é enumerável no teorema anterior é a quantidade de abertos, não os abertos em si, uma vez que os abertos não são enumeráveis. Segundo: não é qualquer união de abertos de A que é disjunta e cobre A. O teorema garante a existência de uma, mesmo que eu não consiga exibi-la.

3 CONJUNTOS FECHADOS

Acabamos de definir conjuntos abertos em **R**. Imaginamos que você tenha feito imediatamente a analogia com a definição de intervalo aberto e, realmente, você estava certo ao fazê-la: intervalos abertos são conjuntos abertos. Será que podemos então falar em conjuntos fechados, assim como temos os intervalos fechados? Sim, podemos, e vamos caminhar para isto.

DEFINIÇÃO 3.3.2: Um ponto a pertencente ao conjunto dos números reais é aderente a um conjunto real X se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$. O conjunto formado por todos os pontos aderentes a X é chamado de fecho de X e denotado por $\overline{X}$.

Vamos tentar entender esta definição. Um ponto real a é aderente se ele está muito próximo de X, mas não necessariamente está em X. Claro que todo ponto que pertence ao conjunto X é aderente a X. Mas observe que um ponto ser interior a X é diferente dele ser aderente a X: para um dado x ser interior a X, basta existir um $\varepsilon > 0$ satisfazendo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$, mas para ser aderente, para todo $\varepsilon > 0$, o intervalo aberto tem que tocar X, isto é, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$. Mais:

COROLÁRIO 3.3.2: Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, para todo intervalo aberto A contendo a, $A \cap X \neq \varnothing$.

EXEMPLO 1: Considere o conjunto dos números naturais N. Claramente, N é um subconjunto real e todos os pontos de N são pontos de aderência. De fato, dado um natural n. qualquer que seja $\varepsilon > 0$, $N \cap (n - \varepsilon, n + \varepsilon) \neq \varnothing$, pois n pertence a ambos os conjuntos. Por outro lado, o número real $\frac{1}{n}$ não é um ponto aderente a N para qualquer n diferente de 1, pois neste caso, $\frac{1}{n} < 1$. Assim, pegando, por exemplo, $N \cap \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\right) = \varnothing$ qualquer que seja n diferente de 1.

EXEMPLO 2: Consideremos agora o conjunto $X = \{x \in R : x < 2\}$. Claramente, todos os elementos de X são pontos aderentes a X. Além disso, o ponto x = 2 também é aderente a X. Agora, x = 2,0001 já não é aderente a X, pois se considerarmos ε = 0,00001, $X \cap (2{,}001 - 0{,}00001; 2{,}001 + 0{,}00001) = \varnothing$.

UNI

Dado um conjunto qualquer A, os pontos que pertencem a A são aderentes a A, independentemente de A ser aberto ou não.

Antes de darmos um exemplo de fecho de um conjunto, vamos considerar o seguinte corolário:

COROLÁRIO 3.3.3: Sejam X um conjunto real limitado inferiormente e Y um conjunto real limitado superiormente. Então
(a) o ponto a = inf X é aderente a X
(b) o ponto b = sup Y é aderente a Y.

Demonstração:

(a) Seja a = inf X. Então a é a maior das cotas inferiores de X, isto é, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon$ pertence a X. Em particular, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Segue, portanto, que a é ponto aderente a X.
(b) Exercício.

EXEMPLO: O fecho de um intervalo aberto (a, b) é o intervalo fechado [a, b]. De fato, já vimos que todo ponto interior ao intervalo é aderente. Agora considere os extremos do intervalo aberto, a e b. Sabemos que a é ínfimo de (a, b) e b é supremo de (a, b). Assim, pelo teorema anterior, a e b são pontos aderentes a (a, b). Logo, $[a,b] \subset \overline{(a,b)}$.

Consideremos agora $x \in \overline{(a,b)}$. Por definição, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (a, b) \neq \emptyset$. Logo $a \leq x \leq b$, pois caso $x < a$, existiria $\varepsilon' > 0$ para o qual $x + \varepsilon' < a$: neste caso, $(x - \varepsilon', x + \varepsilon') \cap (a, b) \neq \emptyset$: contradição. Portanto, $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$, ou seja, $\overline{(a,b)} = [a,b]$ CQD.

EXEMPLO: Pela mesma razão, $\overline{(a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{[a,b]} = \overline{(a,b)} = [a,b]$.

EXEMPLO: O fecho do conjunto dos números racionais **Q** é **R**, assim como o fecho de **I** = **R – Q** é **R**.

PROPOSIÇÃO 3.3.5 Se X e Y forem conjuntos reais tais que $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Demonstração:

Exercício.

DEFINIÇÃO 3.3.3 Diremos que um conjunto real X é fechado se $X = \overline{X}$.

Assim, o conjunto [a, b] é fechado.

Vamos agora enunciar um teorema bastante útil para mostrar que um conjunto é fechado.

TEOREMA 3.3.3 Um conjunto F é fechado em **R** se, e somente se, seu complementar **R** – F for aberto.

Demonstração:

Suponhamos que F é fechado em **R**. Então $F = \overline{F}$, isto é, todo ponto aderente de F pertence a F. Logo, para todo ponto x pertencente a **R** – F, isto é que não pertença a F, existe pelo menos um $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F = \varnothing$. Em particular, para este $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset$ **R** – F. Assim, para cada ponto x pertencente a **R** – F, encontramos pelo menos um $\varepsilon > 0$ (que depende de x) tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset$ **R** – F. Portanto, **R** – F é aberto.

Reciprocamente, se **R** – F é aberto, para cada ponto x pertencente a **R** – F, encontramos um $\varepsilon > 0$ (que depende de x) tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset$ **R** – F, isto é, tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F = \varnothing$. Logo não existe ponto pertencente a **R** – F que seja aderente a F. Segue que apenas os pontos pertencentes a F são aderentes, isto é, $F = \overline{F}$, CQD.

UNI

Atenção: um conjunto que não é aberto não é necessariamente fechado. Existem conjuntos que não são abertos nem fechados, por exemplo, os intervalos (a, b] e [a, b). Além disso, um conjunto pode ser aberto e fechado ao mesmo tempo.

EXEMPLO: O conjunto dos números reais **R** é fechado. De fato, o complementar de **R** em **R** é o conjunto vazio que já sabemos ser aberto.

EXEMPLO: Sabemos que o conjunto vazio é aberto. Pois além de aberto, ele também é fechado. De fato, para mostrar que $\varnothing$, basta mostrar que R é aberto, o que é óbvio: qualquer que seja x um elemento de R, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset$ **R**, qualquer que seja $\varepsilon > 0$.

Como corolário do teorema anterior, temos:

COROLÁRIO 3.3.4 Em R, as seguintes propriedades são válidas:
(a) Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são conjuntos fechados, então $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ também é fechado.
(b) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ for uma família de fechados, então a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechada.

Demonstração:

(a) Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são conjuntos fechados, então **R** - F_1, **R** - F_2, …, **R** - F_n são abertos.

Agora, da teoria dos conjuntos sabemos que R- ($F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$) - (**R** - F_1) $\cap$ (**R** - F_2) $\cap \ldots \cap$ (**R** - F_n), ou seja, uma interseção de abertos que, pela PROPOSIÇÃO 3.3.5 é aberto. Segue que ($F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$) é fechado.

(b) Pelo mesmo argumento anterior, Se $\left(F_\lambda\right)_{\lambda \in L}$ for uma família de fechados, então a $\left(R - F_\lambda\right)_{\lambda \in L}$ é uma família de abertos. Como R – F = R - $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L}\left(R - F_\lambda\right)$, pela proposição 3.3.5, **R** – F é aberto. Portanto, F é fechado, CQD.

DEFINIÇÃO 3.3.4 Dizemos que um conjunto X é denso em R quando qualquer intervalo (a, b) de R contém algum ponto de X, ou seja, quando todo ponto x de R é ponto aderente a X. Neste caso, $\overline{X} = \mathbf{R}$.

A noção de densidade é a de espalhamento, isto é, um conjunto é denso em **R** quando os elementos deste conjunto estão tão espalhados em **R** que é impossível pegar um intervalo de R que não contenha pelo menos um elemento do conjunto.

EXEMPLOS: o conjunto dos números racionais Q é denso em **R**, assim como I = **R** – Q também o é. Não vamos mostrar estas afirmações aqui, mas você pode encontrá-las em qualquer livro da bibliografia indicada.

Como consequência imediata desta definição, temos o seguinte resultado:

TEOREMA 3.3.4 O fecho de todo subconjunto real X é fechado, e $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração:

Seja x um elemento pertencente a R - $\overline{X}$. Então x não é um ponto aderente a X e, assim, existe um intervalo aberto A tal que x pertença a A e A $\cap$ X = $\varnothing$. Assim, todo ponto y pertencente a A pertence também a R - $\overline{X}$, isto é, A é um subconjunto de R - $\overline{X}$ e, portanto, x é um ponto interior a R - $\overline{X}$. Como x foi pego aleatoriamente, segue que todos os pontos de R - $\overline{X}$ são pontos interiores. Portanto, R - $\overline{X}$ é aberto e, consequentemente, R -(R - $\overline{X}$) = $\overline{X}$ é fechado, como queríamos demonstrar.

O próximo resultado traz uma informação bastante importante, que utilizaremos no próximo tópico. A demonstração é bastante interessante, mas nada trivial.

TEOREMA 3.3.5. Todo conjunto X de números reais contém um subconjunto enumerável E, denso em X.

Demonstração:

Seja n um número natural e consideremos o número real 1/n. Então podemos escrever o conjunto dos números reais R como a união de intervalos de comprimento 1/n. De fato, dado x um número real, existe um número inteiro p tal que $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ - para ficar mais fácil de entender esta afirmação, fixe n = 10 e pense em alguns exemplos numéricos-. Assim, $R \subset \bigcup_{p \in Z} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$.

Claramente, esta união também está contida em R: logo, vale a igualdade $R = \bigcup_{p \in Z} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$

Consideremos X um subconjunto real. Então, para cada n e para cada p, $X \cap \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ pode ser vazia ou não.

Assim, para cada n e para cada p, vamos escolher um elemento $x_{pn} \in X \cap \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ quando esta interseção não foi vazia. Note que o conjunto E composto por estes elementos é enumerável, uma vez que temos uma quantidade enumerável de intervalos. Vamos mostrar que E é denso em X.

De fato, seja (a, b) um intervalo aberto contendo algum ponto x de X.

Vamos então escolher n suficientemente grande para que 1/n seja menor do que a distância |b – x|. Por outro lado, x é um número real. Logo existe um número inteiro p tal que $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ e $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \subset (a,b)$. Portanto $x \in X \cap \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$. Além disso, $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \subset (a,b)$ implica $x_{pn} \in$ (a, b). Portanto, qualquer intervalo aberto que contenha o ponto x também contém um ponto $x_{pn} \in$ E. Logo E é necessariamente denso em X, CQD.

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico, estudamos os conjuntos abertos e fechados em "R", mais precisamente:

- Definimos pontos interiores a um conjunto X e o conjunto interior de X, int (X).

- Vimos que o conjunto interior de (a, b), int(a,b) é o próprio (a, b), e que int(a, b] = int[a, b) = int[a,b] = (a, b) quaisquer que seja a, b reais com a<b.

- Como consequência da definição de ponto interior, concluirmos que o interior de um conjunto X deve conter pelo menos um intervalo aberto.

- Mostramos que o interior de um conjunto enumerável é vazio, em particular, os conjuntos dos números naturais **N**, dos números inteiros **Z** e dos números racionais **Q** não possuem pontos interiores.

- Definimos conjunto aberto como sendo os conjuntos em que X = int(X).

- Vimos que a interseção enumerável de abertos é aberta e que a união de uma família qualquer de abertos é aberta.

- Mostramos que subconjunto aberto A de números reais pode ser escrito, de modo único, como uma união de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

- Definimos pontos aderentes e vimos que todo ponto interior é aderente.

- Definimos o fecho de um conjunto como sendo o conjunto de todos os pontos aderentes a ele.

- Mostramos que o fecho do conjunto (a, b) é o intervalo [a,b], assim, como $\overline{(a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{[a,b]} = \overline{(a,b)} = [a,b]$.

- Enunciamos a definição de conjunto fechado a partir da definição de fecho.

- Demonstramos que um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.

- Vimos que as definições de aberto e fechado não são excludentes, isto é, existem conjuntos que são ao mesmo tempo abertos e fechados, e conjuntos que não são abertos nem fechados.

- O conjunto vazio e R são abertos e fechados ao mesmo tempo.

- Mostramos que a união enumerável de fechados é fechada e que a interseção de uma família qualquer de fechados também é fechada.

- Apresentamos a definição de densidade, isto é, de conjuntos densos.

- Vimos que o fecho de todo conjunto fechado é ele próprio.

- Mostramos que todo subconjunto real X contém um subconjunto enumerável e denso em X.

AUTOATIVIDADE

Agora vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico por meio de alguns exercícios.

1 Dado X um conjunto de números reais, o conjunto dos pontos interiores de X, int(X) deve conter pelo menos um intervalo aberto.

2 Mostre que, se X for um conjunto limitado superiormente, então o supremo de X é aderente a X.

3 Se X e Y forem conjuntos reais tais que $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

4 Mostre que o fecho de um conjunto fechado F é fechado em R.

5 Mostre que o único conjunto fechado denso em R é o próprio R.

TÓPICO 4

PONTOS DE ACUMULAÇÃO E CONJUNTOS COMPACTOS

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior, definimos pontos de aderência, ou pontos aderentes. Vimos que todo ponto de X era aderente a X, mas existem pontos fora de X que também são aderentes a ele. Na verdade, os pontos que estão na fronteira de X são pontos aderentes: se considerarmos o conjunto X e todos os pontos aderentes a ele, teremos o fecho de X.

Agora, vamos apresentar outros importantes pontos de um conjunto: os pontos de acumulação. A diferença entre esses pontos e os pontos de aderência é sutil, e vai exigir bastante atenção da sua parte.

Feito isso, abordaremos outro importante conceito de topologia geral no âmbito do conjunto de números reais: conjuntos compactos. Vamos ao trabalho!

2 DEFINIÇÃO E PRIMEIRAS IMPLICAÇÕES

Consideremos X um subconjunto dos números reais não vazio. Diremos que um ponto real a é um ponto de acumulação de X quando, para todo $\varepsilon > 0$, o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém algum ponto de X diferente de a. Denotaremos o conjunto formado por todos os pontos de acumulação de X por X'.

EXEMPLO 1: O intervalo aberto (1, 2) possui infinitos pontos de acumulação, pois todos os elementos do intervalo (1, 2) são pontos de acumulação. Mais: o número 1 também é um ponto de acumulação do intervalo, pois dado $\varepsilon > 0$, $(1, 2) \cap (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon) \neq \emptyset$. Em particular, para ε suficientemente pequenos, $(1, 2) \cap (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon) = (1; 1 + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Também 2 é um ponto de acumulação deste intervalo, pois, para ε suficientemente pequenos, $(1, 2) \cap (2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon) = (2 - \varepsilon, 2) \neq \emptyset$.

EXEMPLO 2: Sejam a e b dois números reais tais que a < b. Então estes números são pontos de acumulação dos intervalos (a, b), (a, b], [a, b) e [a, b] pelas mesmas razões que demonstramos no exemplo anterior. Em particular,
$(a,b)' = (a, b]' = [a, b)' = [a, b]' = [a, b]$.

UNI

Mais a frente, compararemos pontos de aderência a pontos de acumulação para entender melhor a diferença entre eles.

TEOREMA 3.4.1 Dados X um subconjunto real e x um número real, as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) o elemento x é um ponto de acumulação de X
(ii) x é o limite de uma sequência de números pertencentes a X, dois a dois distintos
(iii) Todo intervalo aberto contendo x possui uma infinidade de elementos de X.

Demonstração:

A ideia desta demonstração é provarmos que (i) implica (ii), (ii) implica (iii) e (iii) implica (i). Mostremos a primeira implicação e deixaremos as outras duas como exercício.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Seja x um ponto de acumulação de X. Então, para todo $\varepsilon > 0$, o intervalo aberto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contem algum ponto de X diferente de x.

Fixemos $\varepsilon_1 = 1$. Então existe (pelo menos) um elemento x_1 pertencente a X, distinto de x, tal que $x_1 \in (x - 1; x + 1)$, ou ainda, tal que $0 < |x_1 - x| < 1$.

Como não sabemos exatamente qual a distância entre x_1 e x, consideremos agora $\varepsilon_2 = \min\left\{|x_1 - x|, \frac{1}{2}\right\}$. Novamente, como x é um ponto de acumulação de X, existe um elemento x_2 pertencente a X, distinto de x, tal que $x_2 \in (x - \varepsilon_2; x + \varepsilon_2)$, ou ainda, tal que $0 < |x_2 - x| < \varepsilon_2$.

Assim, $|x_2 - x| < \frac{1}{2}$ e $|x_2 - x| < |x_1 - x|$.

Consideremos agora $\varepsilon_3 = \min\left\{|x_2 - x|, \frac{1}{3}\right\}$. Novamente, como x é um ponto de acumulação de X, existe um elemento x_3 pertencente a X, distinto de x, tal que $0 < |x_3 - x| < \varepsilon_3$.

Assim, $|x_3 - x| < \frac{1}{3}$ e $|x_3 - x| < |x_2 - x|$.

Prosseguindo desta forma, encontramos uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ pertencente a X cujos elementos são dois a dois distintos e de tal forma que $|x_{n+1} - x| < |x_n - x| < \frac{1}{n}$ para todo n.

Como, quando n tende ao infinito, 1/n tende a zero, segue que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, sempre encontramos n_0 tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e, portanto, tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Portanto a sequência $(x_n)_{n \in N}$ converge para x.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Exercício
(iii) $\Rightarrow$ (i) Exercício.

EXEMPLO 1: Consideremos o conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$. Nenhum elemento pertencente a X é um ponto de acumulação de X, pois para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, $X \cap \left(\frac{1}{n} - \varepsilon; \frac{1}{n} + \varepsilon\right) = \emptyset$. Entretanto, o ponto x = 0 é um ponto de acumulação de X – mesmo não pertencendo a X –, pois é limite da sequência $(x_n)_{n \in N}$ com $x_n = \frac{1}{n}$ que, claramente, pertence a X $\left(\lim_{n \to \infty} x_n = 0\right)$.

EXEMPLO 2: Dado o conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ para algum número real x, temos pelo teorema anterior que x é ponto de acumulação de X.

EXEMPLO 3: Observe que o conjunto N, formado pelos números naturais, não tem pontos de acumulação. O mesmo acontece com o conjunto dos inteiros Z. Portanto, $N' = Z' = \emptyset$.

Observe que o teorema anterior nos diz que todo o limite de uma sequência formada por elementos dois a dois distintos é um ponto de acumulação do conjunto formado pelos elementos desta sequência. Como consequência imediata desta observação, temos o seguinte corolário:

COROLÁRIO 3.4.1 Se X for um conjunto que possua pelo menos um ponto de acumulação, então X é infinito.

Em particular, todo conjunto finito não possui pontos de acumulação.

EXEMPLO: O conjunto X = { 1, 2, 3, 4} é finito e, portanto, não possui ponto de acumulação.

3 PONTOS DE ADERÊNCIA, DE ACUMULAÇÃO E ISOLADOS

Você deve ter observado que a definição de ponto de acumulação muito se assemelha à de ponto de aderência. A principal diferença entre o ponto de aderência e ponto de acumulação em um conjunto X é que o ponto de aderência pode pertencer ao conjunto X, de tal forma que não seja necessário ter outro ponto de X próximo a ele. Por outro lado, o ponto de acumulação não pode aparecer isolado. Assim, todo ponto de acumulação é um ponto de aderência, mas nem todo ponto de aderência é um ponto de acumulação. Vamos entender melhor do que estamos falando através de um exemplo bem simples, mas bastante elucidativo: o conjunto dos números naturais N. Vimos que todos os elementos de N são pontos de aderência, entretanto N não possui pontos de acumulação. Na verdade, todos os pontos de N são o que chamamos de pontos isolados.

DEFINIÇÃO 3.4.1 Dado um subconjunto real X, se existir algum ponto x pertencente a X tal que X ∩ (x - ε, x + ε) = {x} para todo ε > 0 suficientemente pequeno, dizemos que x é um ponto isolado de X.

EXEMPLO 1: Os números naturais são pontos isolados de N, assim como os números inteiros são pontos isolados de Z. Em outras palavras, os conjuntos N e Z apenas possuem pontos isolados.

EXEMPLO 2: O conjunto dos números reais não possui pontos isolados.

EXEMPLO 3: O conjunto $X=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ possui infinitos pontos isolados.

Na verdade, dado $\frac{1}{n}$ pertencendo a X, se escolhermos $\varepsilon<\frac{1}{n(n+1)}$, teremos que $X\cap\left(\frac{1}{n}-\varepsilon;\frac{1}{n}+\varepsilon\right)=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (verifique!).

Assim, todos os pontos de X são pontos isolados.

Assim, um ponto pode ser de acumulação ou isolado em relação a um dado conjunto, mas nunca os dois ao mesmo tempo. Por outro lado, os pontos isolados de um conjunto são pontos de aderência!

Finalmente, podemos dizer que os pontos de aderência de um dado conjunto são formados pelos pontos de acumulação e os pontos isolados.

4 PONTOS DE ACUMULAÇÃO, DENSIDADE E ENUMERABILIDADE

Conforme mencionamos, o conjunto formado pelos pontos de aderência de um conjunto é que define o seu fecho. Também dissemos que os pontos de aderência podem ser classificados como pontos de acumulação e pontos isolados, uma vez que nem todos os pontos pertencentes a um dado conjuntos podem ser classificados como pontos de acumulação. Desta forma, podemos então caracterizar o fecho de um conjunto em função dos seus pontos interiores e seus pontos de acumulação.

TEOREMA 3.4.2 Dado X um subconjunto real qualquer, o fecho de X é obtido acrescentando-se aos seus pontos, os pontos de acumulação.

Demonstração:

Queremos mostrar que $\overline{X} = X \cup X'$.

Claramente $X \subset \overline{X}$ e $X' \subset \overline{X}$ (pois todo ponto de acumulação é um ponto de aderência) e, portanto $(X \cup X') \subset \overline{X}$. Vamos então mostrar a inclusão inversa.

Seja $x \in \overline{X}$. Então todo intervalo aberto A contendo x é tal que $A \cap X \neq \varnothing$.

Se x pertence a X, então claramente x pertence a $X \cup X'$. Suponhamos então que a não pertença a X. Então existe algum outro elemento de X que pertença a A, qualquer que seja A. Assim, por definição, x é um ponto de acumulação e, portanto, x pertence a $X \cup X'$.

Então, qualquer elemento do fecho pertença à $X \cup X'$. Segue que $\overline{X} \subset (X \cup X')$ e, portanto, a igualdade, CQD.

Como consequências imediatas do Teorema 3.4.2 , temos os seguintes resultados:

COROLÁRIO 3.4.2: Um conjunto X é fechado se, e somente se, todos os pontos de acumulação de X pertencem a X.

Demonstração: Exercício.

COROLÁRIO 3.4.3: Se todos os pontos de X são pontos isolados, então X é enumerável.

Demonstração.

Seja X um subconjunto real. Então sabemos que existe um subconjunto E de X, enumerável e denso em X. Assim, qualquer ponto x pertencente a X pertence também ao fecho de E. Por outro lado, o ponto x é um ponto isolado em

X, implicando em x não poder ser um ponto de acumulação de E. Logo x pertence a E. Assim, $X \subset E$. Como a inclusão oposta é obvia, segue que X = E.

EXEMPLO 1: Já vimos que o conjunto dos números naturais é composto exclusivamente por pontos isolados. Segue que N é enumerável (na verdade, já sabíamos disso por outros meios!).

EXEMPLO 2: O conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ é composto exclusivamente por pontos isolados e, portanto, é enumerável.

EXEMPLO 3: O conjunto R é não enumerável, portanto, existe pelo menos um ponto em R que não é isolado – na verdade, sabemos que R não possui pontos isolados.

Assim, se o conjunto é não enumerável, ele precisa conter pelo menos um ponto de acumulação. Isso não significa que ele não tenha pontos isolados, apenas que um deles não é. Mas será que podemos concluir de alguma maneira que um conjunto é não enumerável sabendo algo mais sobre seus pontos de acumulação? A resposta é sim. Não iremos demonstrar este resultado aqui, mas você pode encontrá-lo em Lima (2010).

TEOREMA 3.4.3 Seja F um subconjunto real não vazio tal que todos os pontos de F são pontos de acumulação de F, então F é não enumerável. Em particular, todo conjunto fechado enumerável não vazio possui pelo menos um ponto isolado.

EXEMPLO: O conjunto R é composto exclusivamente por pontos de acumulação. Portanto, R é não enumerável.

Intuitivamente, conjunto enumerável é aquele conjunto onde é possível contar os elementos. Nem sempre é trivial fazer essa contagem. Por exemplo, é fácil admitir que o conjunto dos números inteiros é enumerável, agora é bem mais complicado admitir que o conjunto dos números racionais também é.

5 CONJUNTOS COMPACTOS

A seguir, vamos tratar dos conjuntos compactos. Informalmente falando, conjunto compacto é aquele que está condensado em algum lugar, e que podemos cobrir com quantidades finitas de outros conjuntos. A ideia é um pouco intuitiva e até fácil de explicar, mas o conceito matemático vai – mais uma vez – exigir um pouco de paciência para entendê-lo. Na verdade, no contexto que estudaremos – que é a reta real – um conjunto ser compacto é o mesmo que ser fechado e limitado. Entretanto, essa equivalência vale apenas em casos bem determinados (para os espaços métricos), sendo falsa para topologias em geral. Uma das maiores vantagens de se trabalhar com um conjunto compacto é que, se você encontra dificuldades em trabalhar com ele em si, pode encontrar uma cobertura finita dele, formada por conjuntos mais "fáceis" e trabalhar sobre ela. Como esta cobertura contém o conjunto compacto, o que for mostrada para ela, vale para o conjunto original.

5.1 FAMÍLIA DE CONJUNTOS

O primeiro conceito que temos que entender é o de família de conjuntos. Ele remonta um pouco à Teoria de Conjuntos, que você estudou na disciplina de Lógica Matemática.

Uma família de conjuntos nada mais é que uma coleção de conjuntos, que é composta por um número finito, infinito ou mesmo não enumerável de conjuntos. Podemos pensar em família como sendo uma função injetora que, a cada $\lambda \in L$, associa um conjunto C_λ. Assim, esta família pode ser denotada por $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$. Note que o conjunto L é um conjunto qualquer de indexadores dos conjuntos C_λ. Assim, a quantidade de conjuntos C_λ será de igual número de elementos de L.

EXEMPLO 1: Se considerarmos L = {1, 2}, o conjunto C = $\{C_1, C_2\}$ é uma família, onde C_1 e C_2 são conjuntos reais.

EXEMPLO 2: Se considerarmos L = N, o conjunto C = $\{C_1, C_2, \ldots\} = (C_\lambda)_{\lambda \in N}$ é uma família de conjuntos.

O conceito de família existe também para números. Por exemplo, podemos pensar em uma sequência qualquer como sendo uma família de números reais. Entretanto, só vamos falar em conjuntos, porque é este o contexto em que estamos interessados agora.

Vamos então considerar $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ como sendo uma família de conjuntos indexados pelo conjunto L. A reunião desta família (ou união dos seus elementos) é bem definida e é o conjunto de todos os elementos que pertencem, pelo menos, a um elemento da família:

$$\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda = \{x \mid x \in C_\lambda, \text{ para algum } \lambda \in L\}$$

Do mesmo modo, podemos definir a interseção da família como sendo o conjunto formado pelos elementos que aparecem em todos os conjuntos que formam a família:

$$\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda = \{x \mid x \in C_\lambda, \text{ para todos } \lambda \in L\}$$

Se L = {1, 2, …, n}, podemos reescrever esta reunião e esta interseção como sendo

$$\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^{n} C_\lambda = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$$

$$\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda = \bigcap_{\lambda=1}^{n} C_\lambda = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n$$

Ainda, se L = N, podemos reescrever a reunião e a interseção como

$$\bigcup_{\lambda \in N} C_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n \cup \ldots$$

$$\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda = \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \cap \ldots$$

Mas atenção: se L for um conjunto qualquer, ele pode ser não enumerável e, neste caso, a única forma de denotar a reunião e a interseção é $\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ e $\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Para finalizar esta introdução ao assunto das famílias, vamos mostrar o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 3.4.1 Dada uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ composta por subconjuntos reais, valem as seguintes igualdades:

(i) $R - \left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in L} (R - C_\lambda)$

(ii) $R - \left(\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} (R - C_\lambda)$

Demonstração:

Vamos mostrar (i) e deixaremos (ii) a seu cargo.

Se $x \in \left(R - \left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \right) \right)$, então $x \notin \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ e, portanto, $x \notin C_\lambda$ para todo $\lambda \in L$.

Neste caso, $x \in (R - C_\lambda)$ para todo $\lambda \in L$ e, portanto, $x \in \bigcap_{\lambda \in L} (R - C_\lambda)$. Assim, $R - \left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in L} (R - C_\lambda)$.

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{\lambda \in L} (R - C_\lambda)$, $x \in (R - C_\lambda)$ para todo $\lambda \in L$, ou seja, $x \notin C_\lambda$ para

todo $\lambda \in L$. Este fato implica em $x \notin \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ e, assim, $x \in \left(R - \left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \right) \right)$.

Portanto, $\bigcap_{\lambda \in L} (R - C_\lambda) \subseteq R - \left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \right)$.

Segue que $R - \left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in L} (R - C_\lambda)$, como queríamos demonstrar.

Entendido o que significa uma família de conjuntos, vamos dar prosseguimento ao nosso estudo, enunciando o conceito e as propriedades de cobertura e subcobertura.

5.2 COBERTURAS, SUBCOBERTURAS E CONJUNTOS COMPACTOS

Uma cobertura – ou recobrimento – de um conjunto real X é uma família de conjuntos reais, digamos, $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$, tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Em outras palavras, para cada elemento x de X, existe $\lambda \in L$ tal que x seja elemento de C_λ.

Chamamos de subcobertura – ou sub-recobrimento – de C à subfamília $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, onde L′ é um subconjunto de L tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

EXEMPLO 1: Consideremos o intervalo [1, 3]. Se tomarmos os conjuntos $C_1 = (0, 2]$, $C_2 = (1/2, 5/2]$ e $C_3 = (2, 3]$ formam uma cobertura para este intervalo. Além disso, se considerarmos apenas os conjuntos C_1 e C_3 temos uma subcobertura do intervalo.

EXEMPLO 2: Considere agora o conjunto dos números naturais N. Sabemos que N é composto apenas por pontos isolados. Assim, se considerarmos a família de conjuntos $C = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, ...\}$ temos uma cobertura de N. Por outro lado, C não admite subcobertura, pois se tirarmos qualquer um dos conjuntos, por exemplo, {3}, o número natural 3 ficará descoberto.

O teorema a seguir é uma particularidade dos números reais. Na verdade, este teorema, juntamente com o Teorema de Bolzano-Weierstrass visto em tópicos anteriores são resultados clássicos de Topologia na reta e obrigatórios em qualquer curso de Análise Real.

TEOREMA 3.4.4 (Teorema de Borel-Lebesgue) Toda cobertura de um intervalo [a,b] composta por intervalos abertos possui uma subcobertura finita.

Demonstração:

Seja [a, b] um intervalo fechado e limitado e consideremos uma família de intervalos abertos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Queremos mostrar que existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ pertencente a L tais que $X \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$.

Seja X o conjunto formado por todos os elementos de [a,b] tais que [a,x] possam ser cobertos por uma subfamília finita de $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Claramente, X é não vazio, pois a pertence a X. Como X é um subconjunto de [a,b], ele é limitado. Logo, existe c em [a,b] tal que c = supX. Vamos mostrar que c pertence a X.

De fato, como c é elemento de [a,b], existe $\lambda_0 \in$ L tal que $c \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, podemos supor que $A_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$. Assim, $\alpha < c$ e, portanto, deve existir x em X tal que $\alpha < x \leq c$. Então esse valor x pertence a A_{λ_0}. Mas então, tomando a cobertura finita de [a,x] e adicionando este intervalo aberto, temos uma cobertura finita para [a,c]. Portanto, c é elemento de X.

Vamos mostrar agora que c = b.

Suponhamos por absurdo que c < b. Então existe algum elemento d tal que c < d < b.

Novamente, existiria A_λ tal que, unido à cobertura original, formaria uma cobertura finita de [a,d]. Mas então d seria elemento de X e, portanto, menor do que c: contradição.

Portanto, c = b, CQD.

Na verdade, o Teorema anterior pode ser generalizado, implicando qualquer intervalo fechado limitado que contenha uma cobertura de abertos pode ser coberto por uma subcobertura finita. Do mesmo modo, o fato do conjunto ter sido suposto ser um intervalo fechado pode ser generalizado: na verdade, se F for um subconjunto fechado limitado de R que admite uma cobertura de abertos pode ser coberto por uma subcobertura finita.

EXEMPLO 1: O intervalo (0, 1] não é fechado e, portanto, não podemos garantir que toda a cobertura do intervalo possua subcobertura finita. Claro que você pode pensar em várias coberturas já finitas, por exemplo, a formada pelos conjuntos (0, 1) e (1/2, 2). A questão é garantir que TODAS possuam, e é aí que reside o problema. Por exemplo, a família $C = \left(\left(\frac{1}{n},\ 2\right)\right)_{n \in N}$ cobre o intervalo, uma vez que 1/n tende a 0 a medida em que n cresce. Por outro lado, qualquer subcobertura finita seria tal que a união dos subconjuntos abertos corresponderia a $\left(\frac{1}{m},\ 2\right)$ para algum m natural e, neste caso, o intervalo original não estaria coberto.

EXEMPLO 2: O conjunto dos números reais é um conjunto fechado, mas não satisfaz a segunda hipótese do teorema, isto é, não é limitado, e pelo menos uma de suas coberturas abertas não possui subcobertura finita. De fato, se considerarmos a família de abertos $((-n,\ n))_{n \in N}$, certamente ela recobre R. Por outro lado, se supormos que existe uma subcobertura finita que cobre R, existiria um número natural m tal que a união dessa subcobertura finita seria igual a (-m, m). Assim, qualquer número real positivo maior do que m não estaria coberto.

Dado um conjunto qualquer, é bastante complicado provar que toda sua cobertura de abertos possui uma subcobertura finita, a menos do caso em que este conjunto seja fechado e limitado. Mas será que existem outros conjuntos em que isso aconteça? Isto é, existe algum conjunto aberto, por exemplo, em que toda cobertura possua subcobertura finita? No nosso contexto, a resposta é não. Observe o resultado a seguir:

TEOREMA 3.4.5 Seja K um subconjunto real. Então as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) K é limitado e fechado.
(ii) Toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita.
(iii) Todo subconjunto infinito de K possui ponto de acumulação pertencente a K.
(iv) Toda sequência de pontos de K possui uma sequência que converge para um ponto de K.

Demonstração:

Para demonstrar este resultado, vamos mostrar que (i) implica (ii), que implica (iii), implicando (iv) e, finalmente (i).

Que (i) implica (ii), sabemos pelo Teorema de Borel-Lebesgue.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Seja X um subconjunto infinito de K que não possui ponto de acumulação em K. Então, para cada elemento x de K, podemos encontrar um intervalo aberto A_x centrado em x tal que tal que, quando intersectado com X, tenha no máximo, apenas x como elemento em comum (no caso de x ser um ponto isolado de X). Temos então uma cobertura finita de X, dada por $(A_x)_{x\in X}$ tal que $K \subset \bigcup_{x\in X} A_x$. Assim, por hipótese, existe uma subcobertura finita $A_{x_1}, A_{x_2}, ..., A_{x_n}$ de K e, visto que X é um subconjunto de K, de X também. Agora, cada um destes abertos possui, no máximo, um único elemento de X pela maneira como foram construídos. Portanto, K necessariamente é finito. Assim, temos um conjunto finito que possui um subconjunto infinito X: contradição.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência de elementos de K. Então ou esta sequência possui uma quantidade finita de elementos, ou uma quantidade infinita de elementos distintos entre si. Se possuir uma quantidade finita de elementos distintos, existe uma subsequência constante convergente (na verdade, tantas subsequências quantos forem os números repetidos).

Se a quantidade de números distintos entre si for infinita, temos então um subconjunto infinito de K. Assim existe pelo menos um ponto de acumulação desta sequência que pertence a K, digamos, x. Neste caso, todo intervalo aberto centrado em x contém infinitos elementos desta sequência, em particular, com n particularmente grandes. Portanto, x é o limite de alguma subsequência de $(x_n)_{n\in N}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Suponhamos por absurdo que K é ilimitado. Então, tomando X_1 pertencente a K, existe X_2 em K tal que $X_2 > X_1 + 1$. Novamente, existe X_3 tal que $X_3 > X_2 + 1$, e assim por diante. Na verdade, sempre encontraremos uma sequência de elementos em K tal que $X_{n+1} > X_n + 1$. Assim, esta sequência é tal que todas suas subsequências são ilimitadas e, portanto, divergentes. Agora, pela hipótese, existe uma subsequência desta sequência que converge para um ponto de K: contradição.

Assim, K necessariamente é limitado. Suponhamos agora que K não é fechado. Então existe uma sequência de pontos em K convergindo para um ponto fora de K. Neste caso, todas as subsequências desta sequência convergiriam para este mesmo valor, contrariando mais uma vez a hipótese. Portanto K é necessariamente fechado e limitado. Agora estamos em condições de definir conjunto compacto.

DEFINIÇÃO 3.4.2 Um conjunto real K é dito compacto se toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. Na verdade, K é dito compacto se satisfaz uma das condições do Teorema 3.5.2.

EXEMPLO 1: Qualquer intervalo real do tipo [a, b], com a<b é compacto, pois é um conjunto fechado e limitado.

EXEMPLO 2: O conjunto dos números naturais não é compacto, pois nenhum de seus pontos é ponto de acumulação (seus pontos são isolados, lembra?).

EXEMPLO 3: O conjunto {0, 1,1/2, ….,1/n} é compacto, pois é finito e limitado.

TEOREMA 3.4.6: Consideremos uma família enumerável de compactos tais que $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n \supset ...$ Então $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não vazio e compacto.

Demonstração:

Note que K é a interseção de um número enumerável de conjuntos fechados. Então K é fechado. Além disso, $K \supset K_1$, que é compacto e, portanto, limitado. Segue que K é limitado.

Assim, K é fechado e limitado, implicando K ser compacto. Falta-nos mostrar que K é não vazio.

Para cada n natural, vamos considerar $x_n \in K_n$. Então, pela forma como foram definidos, $x_n \in K_1$ para todo n. Assim, visto que K_1 é compacto, existe uma subsequência convergindo para um valor x. Vamos mostrar que x pertence a K.

Seja $\left(x_{n_i}\right)_{n_i \in N}$ a subsequência que converge para x. Então, dado n um número natural qualquer, existe n_0 tal que $n_0 > n$ e, para todo $n_i > n_0$, $K_{n_i} \subset K_{n_0} \subset K_n$, pela forma como estes conjuntos foram definidos, e $x_{n_i} \in K_{n_i} \subset K_{n_0} \subset K_n$. Assim, a partir de certo índice n_0, todos os elementos da subsequência pertencem a K_n, que é fechado por hipótese. Logo $x = \lim_{i \to \infty} x_{n_i} \in K_n$, qualquer que seja n. Segue que x ∈ K, isto é, K é não vazio, como queríamos demonstrar.

LEITURA COMPLEMENTAR

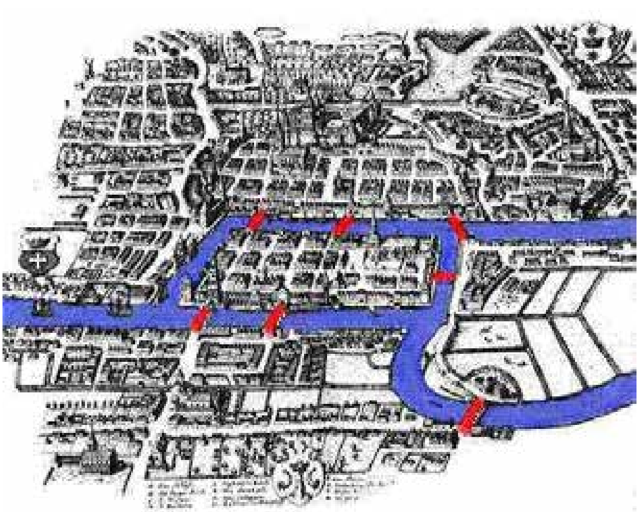
O texto a seguir faz parte de um artigo científico intitulado "Tópicos em Topologia Intuitiva", de Agnaldo da Conceição Esquicalha. Este texto fala um pouco sobre a história da Topologia e também da área de uma maneira mais abrangente.

HISTÓRICO E ALGUNS CONCEITOS ELEMENTARES EM TOPOLOGIA

O célebre problema das sete pontes de Königsberg, cidade da antiga Prússia, hoje Kaliningrado e Rússia, respectivamente, é considerado como o problema que fomentou o surgimento da Topologia.

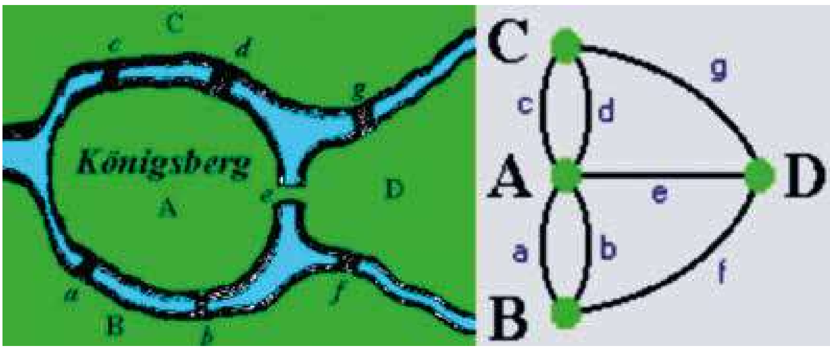
Na parte central de Königsberg, o rio Pregel se divide em dois, chamados de rio Pregel Velho, ao norte, e rio Pregel Novo, ao sul, dividindo a cidade em quatro porções de terra. Para ligar essas porções de terra, foram instaladas sete pontes, como pode ser visto na figura 1. Os habitantes do local lançaram o desafio de se fazer um passeio pela cidade atravessando as sete pontes, cada uma, uma única vez. Este problema já havia se tornado célebre popularmente quando o matemático suíço Leonhard Euler, em 1736, percebeu que o problema não era de Geometria, como se pensava, uma vez que as distâncias envolvidas eram irrelevantes, mas importava a maneira como as porções de terra estavam interligadas entre si. Assim, nasceram a Topologia e a Teoria dos Grafos – Euler estabeleceu um grafo, possivelmente o primeiro da história, representando as porções de terra e as pontes como vértices e arestas, respectivamente, preocupando-se com a forma com que os vértices eram ligados, como já foi dito.

FIGURA 1 – AS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG



A partir do grafo, Euler percebeu que a única maneira de se atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte (aresta) seria se houvesse no máximo dois vértices de onde saia um número ímpar de caminhos. De fato, para cada vértice deve haver um número par de caminhos, pois é necessário um caminho para entrar e outro para sair. Os dois vértices com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Assim, Euler chegou à conclusão de que, como foi configurado, o problema das sete pontes de Königsberg não tinha solução, uma vez que todos os vértices estão associados a um número ímpar de caminhos, o que pode ser verificado na figura abaixo, onde as porções de terra são representadas por letras maiúsculas e as pontes por letras minúsculas.

FIGURA 2 – O PROBLEMA E SEU GRAFO



Apesar do surgimento das ideias em Topologia ser atribuído a Euler e ao problema das Pontes de Königsberg, quase um século antes o matemático francês René Descartes, por volta de 1639, já sabia que se um poliedro tem V vértices, F faces e A arestas, vale a equação V – A + F = 2, relação mais tarde conhecida como Característica de Euler, que publicou sua demonstração em 1751. Ainda no século XVIII outras contribuições à Topologia foram feitas pelo francês Augustin Louis Cauchy e pelo alemão Johann Carl Friedrich Gauss, que também perceberam propriedades de forma mais abstratas do que as descritas pela Geometria.

Na história da Topologia, dois alunos de Gauss têm extrema importância, são eles Johan Listing e August Möbius. Listing foi o responsável pela primeira aparição da palavra Topologia numa publicação científica, num artigo denominado *Vorstudien zur Topologie*, que tratava sobre o estudo dos nós. Já Möbius foi o responsável pela definição precisa do conceito de transformação topológica, que deu identidade a Topologia como sendo o ramo da Matemática que estuda as propriedades das figuras que permanecem invariantes, face de tais transformações. Segundo Devlin (2004), uma transformação topológica é uma transformação de uma figura numa outra de tal maneira que dois quaisquer pontos que se encontram juntos na figura original permanecem juntos na figura transformada. Neste texto, o conceito de superfície utilizado é o mesmo que em Sampaio (2004), onde fica subentendido que superfície é um “ambiente” geométrico bidimensional, no sentido de que “habitantes” fictícios de uma superfície se movem com apenas dois graus de liberdade.

Ideias básicas da Topologia são tão cotidianas que desde a infância todos têm noção de exterior, interior, frente, trás, direita e esquerda, por exemplo. Os dois graus de liberdade citados no parágrafo anterior referem-se à propriedade de que um ponto sobre uma superfície pode mover-se "para frente-trás", "para a direita-esquerda", mas não pode mover-se "para cima-baixo".

A Topologia bidimensional é muitas vezes chamada de "Geometria da Folha de Borracha". Para explicar este sugestivo nome, costuma ser utilizado o mapa do metrô de Londres, Inglaterra. O mapa foi desenhado em 1931, pelo desenhista técnico Henry Beck, e justifica claramente o apelido dado à Topologia em duas dimensões. Comparando o mapa à realidade, percebe-se que escala, direções e sentidos estão errados, e que só se preservam duas características: (1) se uma estação é mostrada ao norte, ou ao sul, do Rio Tâmisa, então é porque realmente está ao norte, ou ao sul, do Rio Tâmisa, e (2) a ordem das estações em cada linha e as estações onde duas linhas quaisquer se cruzam, o que de fato, são as únicas informações que interessam aos passageiros. A justificativa é a seguinte, se este mapa do metrô fosse impresso numa folha de borracha perfeitamente elástica, poderia ser esticado e comprimido de modo com que cada detalhe ficasse correto, implicando num mapa geograficamente preciso.

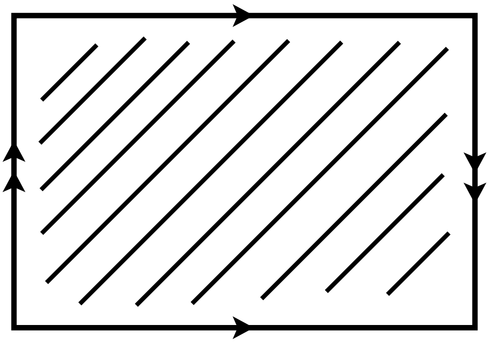
Devlin (2004), sobre o surgimento da Topologia, afirma que a ideia era desenvolver uma Geometria que estudasse as propriedades das figuras que não são destruídas por deformações contínuas e, portanto, não dependem de noções como linhas retas, círculos, cubos e assim por diante, ou de medidas de comprimento, área, volume ou ângulo.

De acordo com Sampaio (2004), define-se como topologia de uma superfície o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que não se alteram quando a ela é aplicada qualquer uma das seguintes deformações: (1) esticar ou inflar a superfície, (2) encolher a superfície ou partes dela, (3) entortar a superfície ou partes dela, e (4) cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e, posteriormente, colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por esse recorte, resgatando a superfície original com a linha demarcada. Quando duas superfícies têm a mesma topologia, diz-se que elas são topologicamente equivalentes, ou que são superfícies homeomorfas. O conjunto de aspectos geométricos que se alteram quando aplicada alguma das deformações citadas acima é denominado geometria da superfície.

Algumas superfícies são definidas de modo abstrato a partir de colagens estratégicas de pares de arestas de regiões poligonais planas. Isto significa que, após a colagem, os já citados habitantes fictícios e bidimensionais dessa superfície, ao cruzar, por exemplo, a aresta superior, emergem para dentro da superfície por meio da aresta inferior. De modo análogo para as arestas da esquerda e da direita. A seguir são apresentados alguns exemplos dessas superfícies assim como seus diagramas planos.

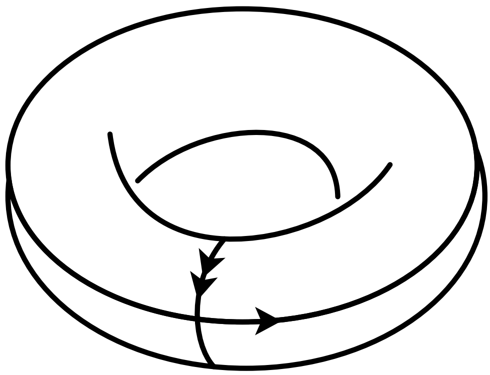
O primeiro exemplo é o toro. Para sua construção, a região poligonal plana que será tomada como ponto de partida é o retângulo. Para produzir o toro plano, colam-se as arestas opostas do retângulo umas nas outras. O toro plano é representado por um diagrama retangular. As setas demarcadas no retângulo indicam que as arestas com setas simples serão coladas uma sobre a outra, assim como as arestas de setas duplas. Após a colagem, os quatro vértices do retângulo tornam-se um único ponto.

FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DO TORO EM 2-D



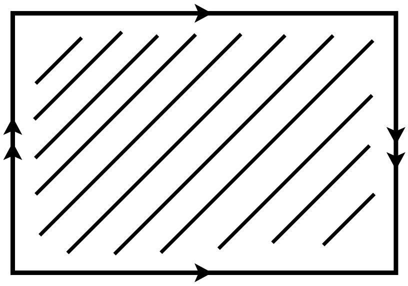
Na figura a seguir há a representação de um toro construído no espaço tridimensional euclidiano, obtido por meio das instruções de colagens dadas anteriormente e da aplicação de algumas transformações topológicas. Esta superfície é denominada toro bidimensional ordinário. Após a colagem, o retângulo desaparece, uma vez que ao contrário do retângulo, a superfície do toro plano não tem bordo.

FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO DO TORO EM 3-D



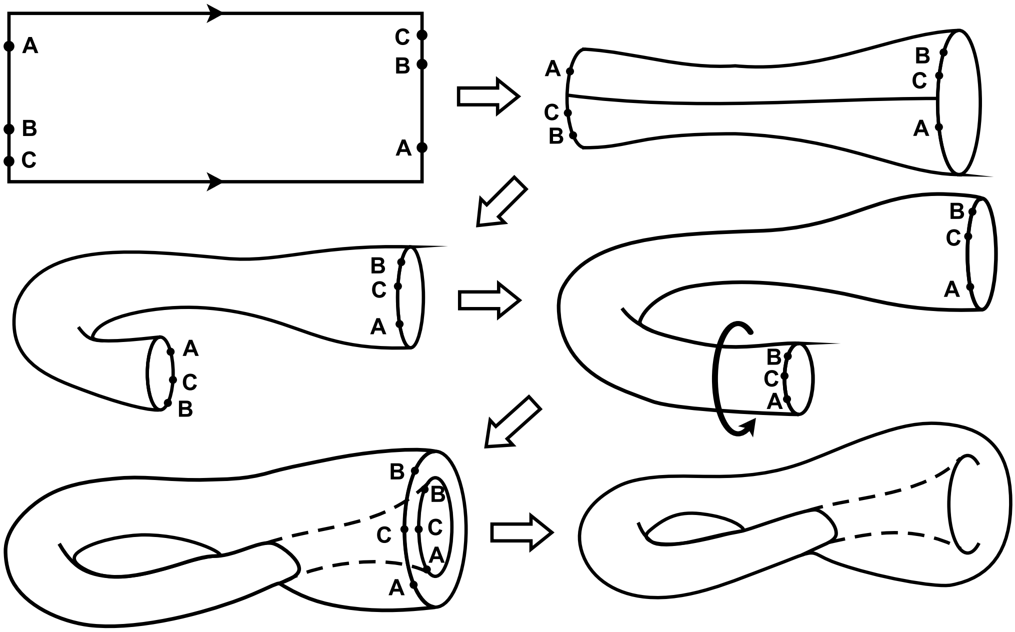
O segundo exemplo de superfícies definidas abstratamente é a garrafa de Klein plana, que é construída da seguinte maneira: toma-se como ponto de partida um retângulo, cola-se a aresta superior na inferior, como na construção do toro plano. Em seguida, cola-se a aresta esquerda na direita, após a aplicação de uma "retorção" de 180° numa das extremidades da faixa retangular. A seguir, a representação plana da garrafa de Klein.

FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO PLANA DA GARRAFA DE KLEIN



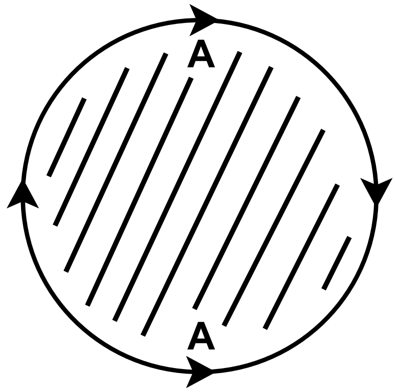
A figura 6 mostra a tentativa de se construir a garrafa de Klein no espaço euclidiano tridimensional. No quinto estágio da construção, uma das extremidades do tubo cilíndrico tem que passar "através" da superfície, para que os pontos A, B, C possam ser colados sobre os pontos A', B' e C', respectivamente. Como cortar a superfície, da forma necessária, não é uma transformação topológica, a única saída é construir a garrafa a partir de uma película "fantasma". Assim, a superfície da garrafa passa através de si mesma, sem, contudo, se autointerceptar.

FIGURA 6 – CONSTRUÇÃO DA GARRAFA DE KLEIN EM 3-D



Outro exemplo de superfície definida abstratamente é o plano projetivo, que pode ser representado por um diagrama plano circular, de duas arestas curvilíneas, como na figura 7.

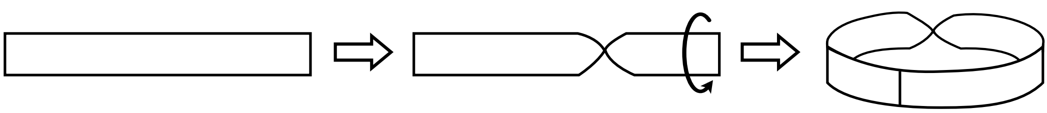
FIGURA 7 – UMA REPRESENTAÇÃO DO PLANO PROJETIVO



A região circular plana pode ser imaginada como uma semiesfera achatada, após uma aplicação topológica. Cada ponto do bordo circular é colado no ponto diametralmente oposto. Neste caso, a aresta curvilínea à esquerda é colada na aresta curvilínea à direita, após a aplicação de uma retorção de 180° num dos dois lados. Esta construção é impossível de ser realizada no mundo real. Após a colagem, os dois pontos demarcados por A tornam-se um só ponto do plano projetivo.

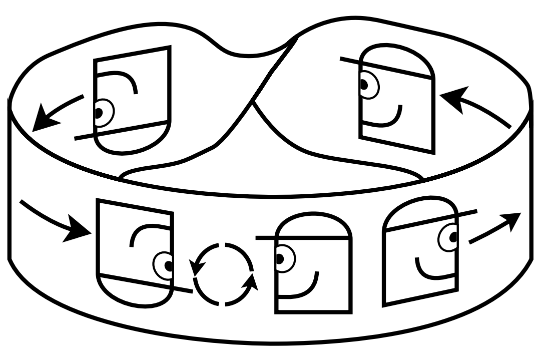
O próximo e possivelmente mais famoso exemplo de superfícies definidas abstratamente é a faixa de Möbius, que pode ser construída tomando uma faixa do retângulo utilizado para a construção em 2-D da garrafa de Klein, aplicando a ela uma "retorção" de 180º e colando as setas duplas, como pode ser visto na figura 8.

FIGURA 8 – CONSTRUÇÃO DA FAIXA DE MÖBIUS



Ainda sobre a faixa de Möbius, uma consideração importante deve ser feita – se um simpático quadrado for um "habitante" da faixa de Möbius, e resolver passear por ela até alcançar novamente sua posição inicial, ele chegará a esta de "cabeça para baixo", como visto na figura 9. E por esta razão, diz-se que o caminho percorrido pelo quadrado é um caminho que inverte orientação.

FIGURA 9 – PASSEIO PELA FAIXA DE MÖBIUS.



Superfícies contendo um caminho fechado que inverte orientação são chamadas superfícies não orientáveis. Para confirmar que uma superfície é não orientável, basta verificar que ela contém em si uma faixa de Möbius. Superfícies que não contém dentro si uma faixa de Möbius são chamadas superfícies orientáveis. A garrafa de Klein e o plano projetivo são superfícies não orientáveis, enquanto a esfera e o toro bidimensional são orientáveis.

Uma superfície é fechada quando não tem bordo, e ao mesmo tempo, pode ser subdivida em um número finito de triângulos. Supõe-se que um triângulo numa superfície é uma porção da superfície homeomorfa a uma região triangular plana. Uma coleção de triângulos de uma superfície é chamada uma triangulação da superfície se obedecer as regras a seguir:

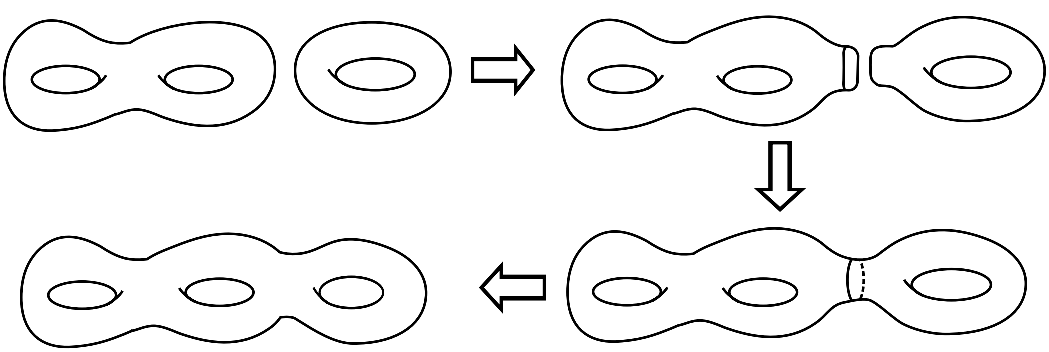
(1) Cada par de triângulos da coleção tem em comum uma aresta ou um vértice, ou nada tem em comum;
(2) Cada aresta de um desses triângulos é comum a exatamente dois triângulos;
(3) Para cada par de pontos A e B da superfície, existem triângulos Δ1,..., Δn, com A na região triangular Δ1 e B na região triangular Δn, tal que cada dois triângulos consecutivos desta sequência têm uma aresta em comum. Esta condição garante que a superfície é conexa por caminhos, isto é, para cada dois pontos A e B da superfície, se pode ir de A até B por um caminho traçado em uma faixa de triângulos.

Como exemplo de uma superfície não fechada tem-se o plano euclidiano, que apesar de não ter bordo, não pode ser subdividido em um número finito de triângulos. Um retângulo plano também não é uma superfície fechada porque tem bordo. A esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo são superfícies fechadas. As superfícies fechadas, por serem reunião de um número finito de triângulos, são denominadas superfícies compactas. Logo, o termo superfície fechada tem o mesmo significado que superfície compacta e sem bordo.

Um resultado importante em Topologia garante que todas as superfícies fechadas concebíveis, são construídas por meio de um número finito de somas conexas entre alguma(s) da(s) quatro superfícies básicas: a esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo. Intuitivamente, a soma conexa é realizada da seguinte forma: considere duas superfícies separadas A e B, mas próximas. Em seguida, corte e remova uma pequena região circular de cada uma das duas superfícies. Assim, um pequeno bordo circular será criado nas superfícies A e B. Por fim, estique um pouco as duas superfícies para fora, puxando-as por seus bordos circulares, fazendo com que os dois bordos se aproximem e, finalmente, cole os bordos circulares um no outro, obtendo a soma conexa de A e B.

A seguir um exemplo de soma conexa entre duas superfícies, um bitoro, à esquerda, e um toro, à direita.

FIGURA 10 – PROCESSO DE SOMA CONEXA ENTRE UM BITORO E UM TORO



Ainda sobre superfícies definidas abstratamente, pode-se afirmar que,

(1) toda superfície orientável é, topologicamente, uma esfera ou um toro, ou uma soma conexa de dois ou mais toros;
(2) toda superfície não orientável é, topologicamente, um plano projetivo, ou uma soma conexa de dois ou mais planos projetivos;

(3) a garrafa de Klein é topologicamente, a soma conexa de dois planos projetivos;
(4) a soma conexa de um toro e um plano projetivo é topologicamente a soma conexa de uma garrafa de Klein com um plano projetivo.

As demonstrações desses resultados fogem ao escopo deste trabalho.

Voltando um pouco à História, foi por meio da contribuição do matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann, no início do século vinte, que utilizando superfícies em seus trabalhos sobre Análise Complexa, fomentou o estudo das propriedades topológicas das mesmas. Mais tarde, Henri Poincaré foi o responsável pelo surgimento da Topologia Algébrica, que tenta utilizar conceitos da Álgebra na classificação e no estudo das Superfícies de Riemann. Outros dois ramos da Topologia são a Topologia Geral, que se dedica ao estudo da continuidade em espaços topológicos mais gerais, sem nenhuma estrutura adicional, e a Teoria das Variedades, que se dedica ao estudo das variedades, que são generalizações das superfícies.

Poincaré foi também o responsável por um dos sete célebres problemas, conhecidos como Problemas do Milênio, cujas soluções são estimadas em um milhão de dólares. Em poucas e simples palavras, a conjectura de Poincaré afirma que qualquer variedade tridimensional fechada e com grupo fundamental trivial é homeomorfa a uma esfera tridimensional. Este problema, enunciado em 1904, permaneceu aberto por cerca de cem anos até que o matemático russo Gregori Perelman conseguiu resolvê-lo. Um fato curioso sobre Perelman, é que este se recusou a receber a Medalha Fields, considerada como o Prêmio Nobel da Matemática, e também diz não ter interesse no prêmio de um milhão de dólares, oferecido pelo Clay Mathematics Institute pela solução do problema.

Outro conceito importante é o de invariantes topológicos, que são as propriedades dos espaços topológicos que são preservadas por qualquer homeomorfismo. Nesta seção foram apresentados, superficialmente, alguns dos invariantes topológicos, que são sete: Compacidade, Conexidade, Conexidade por Arcos, Característica de Euler, Grupo Fundamental, Grupo de Homologia e Grupo de Homotopia.

Segundo Pinto (2004), nas últimas décadas, pesquisadores ligados à Matemática Aplicada perceberam a utilidade da Topologia para atacar certos tipos de problema, em particular os que se referem às equações diferenciais não lineares. Faz-se uso da Topologia para provar, de modo qualitativo, que certos tipos de equações diferenciais não lineares admitem soluções. Mais recentemente, a Topologia tem sido utilizada como fundamentação matemática para a Teoria das Super Cordas, a mais recente teoria dos físicos sobre a natureza do Universo.

FONTE: ESQUINCALHA, A. C. Disponível em: <http://www.uff.br/var/www/htdocs/dalicenca/images/artigo7.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2013.

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico, estudamos os pontos de acumulação de um conjunto real e os conjuntos compactos, mais precisamente.

- Definimos pontos de acumulação e pontos isolados.

- Vimos que, embora seja sutil, existem diferenças entre pontos de acumulação e ponto de aderência.

- Mostramos que todo ponto de acumulação é um ponto de aderência, mas que a recíproca é falsa.

- Encontramos diferentes maneiras de decidir se um ponto é de acumulação para um conjunto ou não.

- Aprendemos a definir fecho em termos de pontos de acumulação e pontos isolados.

- Vimos que um conjunto é fechado se todos seus pontos de acumulação forem elementos seus.

- Observamos que os conceitos de pontos isolados e enumerabilidade estão ligados, assim como o conceito de pontos de acumulação e de não enumerabilidade.

- Definimos família de conjuntos.

- Enunciamos os conceitos de cobertura e subcobertura de um conjunto.

- Vimos que um conjunto compacto é aquele em que toda cobertura admite uma subcobertura finita.

- Mostramos que, no caso da reta, um conjunto ser compacto é o mesmo que ser limitado e fechado.

- Caracterizamos compactos em função de sequências e pontos de acumulação.

- Mostramos que o conjunto interseção de compactos contidos um no outro é compacto.

AUTOATIVIDADE

Agora vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico por meio de alguns exercícios.

1 Seja X um subconjunto real. Mostre que, se um número real x é o limite de uma sequência de números pertencentes a X, dois a dois distintos, então todo intervalo aberto contendo x possui uma infinidade de elementos de X.

2 Dados X um subconjunto real e x um número real, mostre que, se todo intervalo aberto contendo x possui uma infinidade de elementos de X, então o elemento x é um ponto de acumulação de X.

3 Dado conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ mostre que, para cada n basta escolher $\varepsilon < \frac{1}{n(n+1)}$, para garantir que o ponto $\frac{1}{n}$ é um ponto isolado de X.

4 Mostre que um conjunto X é fechado se, e somente se, todos os pontos de acumulação de X pertencem a X.

5 Dada uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ composta por subconjuntos reais, mostre que

$$R - \left(\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} \left(R - C_\lambda \right).$$

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2011.

_________. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010

_________. Arquimedes, o rigor e o método. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 4, p. 27-45, dezembro de 1986.

ESQUINCALHA, A. C. **Tópicos em Topologia Intuitiva**. Disponível em: <http://www.uff.br/var/www/htdocs/dalicenca/images/artigo7.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M B. **Cálculo B**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

LIMA, E. L. **Curso De Análise**. 12. ed. São Paulo: IMPA, 2010.

_________. **Análise Real**. 7. ed. São Paulo: IMPA, 2004.

_________. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1976.

MAIO, W. **Fundamentos De Matemática**: cálculo e análise. Rio de Janeiro: LCT, 2007.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números**: Uma Introdução à Matemática. 1. ed. São Paulo: Ed Edusp, 1998.

SARRICO, C. **Análise Matemática**: leitura e exercícios. Lisboa: Gradiva, 2002.

STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 1. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.